

-応用物理-

-後期期末-

7 電流と磁場

7.12 磁性体がある場合の磁場

磁化… 物質が磁石のな性質をもつことで、全ての物質は強弱の差こそあれど磁場の中で磁化します。

磁性体… 磁気的な性質に着目した時の物質の呼び方です。

ボーア磁子… 電子がスピンという自転的運動によってもつ固有の磁気モーメントのことです。

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m} = 9.27 \times 10^{-24} [\text{A} \cdot \text{m}^2]$$

m は電子の質量, h はプランク定数といい, $6.63 \times 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}]$ です。

磁化 \vec{M} … 物体を磁場の中に置くと, 原子の磁気モーメントの向きが揃って磁場の方向を向くため, 巨視的な大きさの磁気モーメントをもち, 磁化します. このとき, 単位体積中の原子の磁気モーメントのベクトル和を物質の磁化 \vec{M} と定義します.

$$\vec{M} = \sum_{j(\text{単位体積})} \vec{m}_j$$

また, 磁化の単位は $[\text{A} \cdot \text{m}^2 / \text{m}^3] = [\text{A} / \text{m}]$ です.

磁化と分極磁荷… 磁化 \vec{M} の磁性体の磁化に垂直な表面には, 面密度 $\sigma_m = M, -M$ の分極磁荷が現れます.

磁場を作る電流の種類… 磁場 \vec{B} をつくる電流 I には,

- 導線や放電管の中を流れる伝導電流 I_0
- ミクロな電流 I_m

の 2 種類があります.

電流による磁場の違い… 先述の違いがあるため, 磁場 \vec{B} は I_0 の作る $\vec{B}^{(c)}$ と I_m の作る $\vec{B}^{(m)}$ の和として考えます.

I_m が作る磁場は主に磁化 \vec{M} や分極磁荷 $q_m, -q_m$ として現れます.

磁場 \vec{H} … $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ と定義され, 主に I_0 が作る磁場を表します. 正確にいうとこれも I_m による磁場を含みます.

$\vec{H}^{(c)}$ と $\vec{B}^{(c)}$ の対応… I_0 による部分 $\vec{H}^{(c)}$ を考えると,

$$\Delta H^{(c)} = \frac{I_0 \Delta s \sin \theta}{4\pi r^2}$$

に従って I_0 が作る磁場で、これを $\mu_0 I$ に置き換えると \vec{B} の計算式になります。そのため、2つの関係は $\vec{H}^{(c)} = \frac{\vec{B}^{(c)}}{\mu_0}$ と表されます。

$\vec{H}^{(m)}$ と $\vec{B}^{(m)}$ の対応... 磁性体の分極磁荷 q_m がクーロンの法則にしたがって作る磁場で、2つの関係は $\vec{B}^{(m)} = \mu_0 \vec{H}^{(m)} + \mu_0 \vec{M}$ と表されます。また、磁石内部での $\vec{B}^{(m)}$ と $\vec{H}^{(m)}$ は向きが逆です。磁石の外では $\vec{M} = \vec{0}$ のため、 μ_0 以外は同じになります。

磁化率... 磁場 \vec{H} と磁化 \vec{M} の比例定数です。磁化 \vec{M} は磁化を引き起こした磁場に比例します。そこで、次元が同じ \vec{M} と \vec{H} の比例関係を

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

χ_m を磁化率または磁気感受率といいます。これは無次元量です。

透磁率... 磁場 \vec{B} と磁場 \vec{H} の比例定数です。磁化率を使うと、 \vec{B} は以下のように表せます。

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H}$$

ここで、**比透磁率** $\mu_r = 1 + \chi_m$ と定義すると、

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

となります。このとき、 $\mu = \mu_0 \mu_r$ が透磁率です。

内部が満たされた無限長のソレノイドの磁場... 両端の分極磁荷が遠いため、 $\vec{H}^{(m)}$ が無視でき、 $\vec{H}^{(c)} = \vec{H}$ が計算できます。空芯の無限に長いソレノイドでは、 $B = \mu_0 n I$ 、外部では $B = 0$ のため、

$$H = nI \quad (\text{ソレノイドの内部})$$

$$H = 0 \quad (\text{ソレノイドの外部})$$

です。内部を満たす誘電体の比透磁率を μ_r とすると、

$$B = \mu_r \mu_0 n I \quad (\text{ソレノイドの内部})$$

$$B = 0 \quad (\text{ソレノイドの外部})$$

となります。そのため、長いソレノイドの内部の磁場 \vec{B} は内部が真空の場合の μ_r 倍になります。

7.13 反磁性体, 常磁性体, 強磁性体

反磁性体… 磁場の中で誘起される磁化 \vec{M} が磁場と逆向きで, 大きさが小さい物質のことです. 式で表すと, $\chi_m < 0$ で, $0 < |\chi_m| \ll 1$ となります. 磁場がかかっているときは磁気モーメントを持ちませんが, 磁場をかけると逆向きに磁化します.

常磁性体… 磁場の中で誘起される \vec{M} が磁場と同じ向きで, 大きさが小さい物質のことです. 式で表すと $\chi_m > 0$ で, $0 < |\chi_m| \ll 1$ となります. 磁場がかかっていると原子の磁気モーメントはばらばらな方向を向いていますが, 磁場をかけるとその一部が磁場の向きに揃って磁化します.

強磁性体… 磁石に強く惹きつけられ, 永久磁石になり得ます. 磁場のないところでも磁気モーメントが自発的に同じ方向を向きますが, 実際はいくつかの異なる磁性が強い区域に分かれます. 各区域内では原子の磁気モーメントが一定の方向を向いていますが, 全体としては磁化が 0 に近いことが多いです.

磁区… 強磁性体の磁性の強い区域のことで, およそ $10^{-2} \sim 10^{-6}$ [cm] 程度の大きさです. 強磁性体の内部エネルギーを低くするためにできます.

磁壁… 磁区の境界です. これによって内部エネルギーが高くなるものの, 全体としての内部エネルギーは磁区を作って磁力線が外に出ないほうが低くなります.

磁場の中の強磁性体… 磁場の方向に磁化していた磁区が成長し, それと同時に磁区の磁化の方向が磁場の方向を向くように回転します. 結果として, 強磁性体の磁化の大きさ M は磁場の強さ H と共に増大します.

磁化の飽和… H が非常に大きくなり, 磁化が増加しなくなる状態です. 全ての原子の磁気モーメントが磁場の方向を向いても, 有限の磁化 M_S しか得られません. そのため, H が非常に大きくなると磁化は増加しなくなります.

残留磁化… 飽和状態まで磁化した後に磁場の強さ H を弱めると, 磁化 M は減少していきます. ただし, $H = 0$ になっても M は 0 にならず, ある大きさの磁化 M_r が残ります. これが残留磁化で, 永久磁石はこれを利用しています.

保磁力… 磁場の向きを逆にしてもある程度磁化は残り, $H = -H_C$ の時に初めて $M = 0$ になります. この H_C を保磁力といいます. そのまま逆向きの磁場を強くしていくと, 逆向きの磁化が飽和します.

磁化曲線… 強磁性体の磁化 M と磁場 H の関係を表す曲線のことで, **ヒステリシス (履歴) ループ**とも言います.

磁気ヒステリシス… 磁化の強さ M が過去の磁化に関係することです.

ヒステリシス損失… 変圧器では鉄心が周期的に磁化しますが, 磁化曲線が囲む面積の μ_0 倍を単位体積あたり・1 周期ごとに熱として失います. これがヒステリシス損失で, 磁場の最大値を小さくすると減らすことができます.

キュリー温度… 飽和状態での磁化 M_S は温度の関数ですが, $M_S = 0$ になる温度のことをキュリー温度といいます. 磁性体はこれ以上の温度だと強磁性がなくなり, 常磁性を示します.

硬磁性材料… 磁化が変化しにくく, 永久磁石を作るのに適しています.

軟磁性材料… 磁化が変化しやすく, 変圧器やチョークコイルの心などに用いられます.

半硬磁性材料… 保磁力がある程度の大きさを持ち, 磁化曲線が角ばっている材料です. 記憶材料ともいい, 磁気テープや磁気ディスクを作るのに適しています.

8 振動する電磁場

8.1 電磁誘導

ファラデーの実験… ファラデーは鉄の輪の半分にコイル A を、もう片方にコイル B を巻きつけ、B には検流計を繋ぎました。なんでそんな事したかだつて？俺に質問するな！教科書によると、電流から磁気が発生することが分かっており、磁気から電流が得られると考えていたためとされています。コイル A に電流を流した瞬間と切った瞬間に検流計の針が少しだけ触れて元の位置に戻ったそうです。

電磁誘導… コイルを貫く磁束が変化すると、コイルに起電力が生じる現象です。ファラデーが行った実験では、電流の増加/現象に伴い磁束が変化したため、コイル B に起電力が働いて検流計の針が振れています。必ずしもコイル同士である必要はなく、コイルに磁石を近づけたり遠ざけたり、磁石にコイルを近づけたり遠ざけたりしても同じ現象が起こります。

レンツの法則… 電磁誘導によって生まれる起電力 (誘導起電力) は磁束の変化を打ち消す向きにできる、という法則です。ファラデーの実験においては

- 電流を流した瞬間: A と逆向き (磁束が増えたので打ち消すために逆向きの磁束を作る)
- 電流を切った瞬間: A と同じ向き (磁束が減ったので打ち消すために同じ向きの磁束を作る)

となります。右ねじの法則を磁界の向きから考えると分かりやすいと思います。

電磁誘導による起電力の違い… 電磁誘導は、時間あたりに変化する磁束の数によって起電力が変わります。多ければ多いほど起電力が大きくなるため、

- 急速に磁束が変化する
- コイルの半径が大きい (磁束が貫く面積が広い)

といった特徴があるとより大きな起電力が得られます。

電磁誘導で生まれるもの… 電磁誘導で生まれるのは、電流ではなく起電力 (電圧) です。そのため、抵抗に差がある 2 つの物質でコイルを作って逆向きに繋げても、電流計の針が振れないことで確かめることができます。もし電流が生まれるなら、抵抗値によって電圧に差が生まれ、どちらかに検流計の針が振れるはずですが。

誘導起電力の大きさと向き… 大きさは磁束の時間変化率と同じで、向きは逆になります。ただしそれはコイル 1 巻き分のため、巻数をさらにかける必要があります。

$$V_i = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

N はコイルの巻数です。

1. 誘導起電力は回路を貫く磁束が変化している間だけ存在し、その大きさ V_i は回路を貫く磁束 Φ の時間変化率 $\frac{d\Phi}{dt}$ の大きさに等しい.
2. 誘導起電力は、それによって生じる誘導電流のつくる磁場が、回路を貫く磁束の変化を打ち消す向きに生じる.

誘導電場… 磁場が時間とともに変化する場合、電磁誘導によって電場ができます。これを誘導電場といい、誘導起電力はこの電場によって生じます。一般に、電場 $E =$ 電荷の作る電場 + 電磁誘導による電場 です。

誘導電場の電気力線… 電荷の作る電場の電気力線は、正電荷を始点とし負電荷を終点とする曲線です。一方、誘導電場の電気力線は閉曲線になり、始点も終点もありません。そのため、電荷をこの電気力線に沿って 1 周させると誘導電場が仕事をします。この仕事が誘導起電力となり、コイルに電流が流れるという訳です。

$$V_i = \oint_C E_t ds (E_t \text{は電場の接線方向成分})$$

動く回路に誘導される起電力… 磁場が変化せず回路が動く場合は、電場が存在せず、磁場のみです。この場合の起電力は、自由電子にはたらく磁気力 ($F = qvB \sin \theta$) によって発生し、移動した向きと逆向きに力がかかるような向きに、大きさ $E = vB$ の電場 \vec{E} ができます。

8.2 磁場の中で回転するコイルに生じる起電力

ファラデーが電磁誘導について講演したときに、当時の大蔵大臣が「これは何かの役に立つのですか」と質問したという。これに対して、ファラデーは、「もちろんですとも閣下。まもなく課税できるようになるでしょう。」と答えたそうである。1831 年に発見された電磁誘導は、現在では大いに役立っているが、最大の利用価値は発電機への応用であろう。

教科書からの引用ですが、ノーベル賞を取った東工大の先生は基礎研究が大事って言ってましたね。

交流発電機… 一様な磁場 \vec{B} の中で、磁場に垂直な軸 OO' のまわりに、面積 A の長方形にしたコイルを角速度 ω で回転させます。コイルの面の法線 \vec{n} と磁場 \vec{B} のなす角を $\theta = \omega t$ とすると、コイルを貫く磁束は以下の式で表されます。

$$\Phi = BA \cos \theta = BA \cos \omega t$$

これを t で微分すると誘導起電力が求められるため、

$$V_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BA\omega \sin \omega t$$

となります。

交流発電機の起電力の変化… 起電力が最大になるのは磁場とコイルの面が平行の時、垂直の時は 0 です。半回転すると面の表と裏が逆になり、起電力の符号も逆になります。また、 V_i の式から分かるように、この起電力は周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ 、周波数 $\frac{\omega}{2\pi}$ の周期関数で表される交流起電力です。

8.3 相互誘導と自己誘導

相互誘導… 1つの閉回路の電流が変化すると、他の閉回路に誘導起電力が生まれる現象のことです。例えば、2つのコイル L_1, L_2 が接近していたり、同じ鉄心に巻かれている場合は、 L_1 に電流を流すともう片方を貫く磁束 $\Phi_{2\leftarrow 1}$ が L_2 を貫き、誘導起電力 $V_{2\leftarrow 1}$ が生まれます。

$$V_{2\leftarrow 1} = -\frac{d\Phi_{2\leftarrow 1}}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

相互インダクタンス… 上の式の M_{21} です。これは L_1, L_2 のそれぞれの形と巻き数、相対的な位置、付近の磁性体などによって決まる定数で、単位は H (ヘンリー) = V · s / A です。

相互インダクタンスの相反定理… L_2 に電流を流しても相互誘導によって L_1 に起電力が生まれます。これは

$$V_{1\leftarrow 2} = -M_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

と表されますが、

$$M_{12} = M_{21}$$

という関係があります。

自己誘導… コイルを流れる電流が変化するとき、他のコイルだけでなく自分の作り出した磁場を変化を邪魔するような誘導起電力も生まれます。これが自己誘導で、本来の起電力と逆方向にかかるため**逆起電力**ともよばれます。

$$V_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

自己インダクタンス… 上の式の L のことで、 $L = \frac{\Phi}{I}$ です。単にインダクタンスともいいます。相互インダクタンスと同様、閉回路の形と巻き数、近くの磁性体によって決まる定数で、単位も H (ヘンリー) です。また、上の式から、 $L > 0$ です。

時定数… LR 回路 (コイルと抵抗を繋げた回路) では、回路のスイッチを入れてから t 秒後の電流が $I = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$ と表されます。e の指数が -1 になる t を時定数といい、 $\frac{L}{R}$ で表されます。ちなみに、RC 回路 (抵抗とコンデンサを繋げた回路) の時定数は RC です。

ソレノイドのインダクタンス… 空芯で長さ d 、断面積 A 、1m あたり n 巻のソレノイドのインダクタンスを求めます。このソレノイドに電流 I が流れると、内部の磁場の強さ $B = \mu_0 n I$ のため、コイルを貫く磁束は 1 巻きごとに $\mu_0 n I A$ です。全体では $\Phi = \mu_0 n^2 d I A$ となり、 $\Phi = L I$ から、 $L = \mu_0 n^2 d A$ となります。また、非透磁率 μ_r の磁性体が芯になっている場合、 $L = \mu_r \mu_0 n^2 d I A$ です。

コイルに流れる電流を増やすには… 逆起電力に逆らって自由電子に仕事をしなければいけません。時間 Δt で電流を I から ΔI まで増やす時、逆起電力に逆らって移動する電気量は $I \Delta t$ です。そのため、必要な仕事は

$$\Delta W = V I \Delta t = L \frac{\Delta I}{\Delta t} I \Delta t = L I \Delta I$$

です。したがって、電流を 0 から I まで増やすためには

$$W = \int_0^I L I dI = L \int_0^I I dI = \frac{1}{2} L I^2$$

の仕事が必要になります。

磁気エネルギー… 電流 I が流れているコイルには、上記の仕事と同じだけのエネルギー $U = \frac{1}{2}LI^2$ が蓄えられています。

長いソレノイドの磁気エネルギー… 磁場 $B = \mu_0 nI$ 、インダクタンス $L = \mu_0 n^2 dA$ のため、

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 dA \left(\frac{1}{\mu_0 n} B \right)^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 dA$$

です。 dA はソレノイドの体積のため、単位体積あたり

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

という大きさの磁場のエネルギーがあります。

変圧器… 相互誘導を利用して、交流の電圧を昇降する装置です。1次コイルと2次コイルの巻数をそれぞれ N_1, N_2 とし、1次コイルに電圧 V_1 をかけると、1次コイルの逆起電力 V_{i1} と2次コイルの誘導起電力 V_2 は

$$V_{i1} = -N_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad V_2 = -N_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

です。1次コイルの抵抗 R_1 は無視できるとすると、逆起電力 V_{i1} は外から加えた V_1 と釣り合うため、

$$\frac{|V_2|}{|V_1|} = \frac{N_2}{N_1}$$

という関係があることが分かります。そのため、 $N_1 < N_2$ なら電圧が高くなり、 $N_1 > N_2$ なら低くなります。

参考文献

[1]