-応用物理-
-前記中間-

目 次

1　力学の基本

1.1　力

力 ··· 物体の運動状態を変化させたり, 変形させたりする原因になる作用のことです.
要するに物を動かしたり止めたり変形させますってこと. ~~力こそパワー~~

力の表し方 ··· 力を表すには, その大きさと方向, 更に作用点 (物体に作用する点) が必要です. 記号で表すときは, $\boldsymbol{F}$ のように太字にしたり, $\vec{F}$ のように上に矢印をつけたりします.

合力 ··· 複数の力と同じ効果を与える力のことです. それぞれの力のベクトルの和で表されます.
ちなみに, 逆に 1 つの力を複数に分けることも可能で, その場合は分力といいます.

力のつり合い ··· 止まっている物体の 1 点に複数の力が作用するとき, その合力が $\vec{0}$ の状態です. 見かけ上は動きませんが, 力がかかっていない状態とは違うので注意しましょう. また, 異なる点に作用していると, 合力が $\vec{0}$ でも回転してしまう場合があります (詳細は後述) .

垂直抗力 ··· 2 つの物体が触れている時, 接触面と垂直に作用する力です.

摩擦力 ··· 2 つの物体が触れている時, 接触面と平行に作用する力です. 相対運動を邪魔する方向に働きます.

静止摩擦力 ··· 物体が動いていない時の摩擦力です. 物体に力が加わるに連れて大きくなりますが, 最大値を超えると物体が動き始めます. 最大値 F_{max} は垂直抗力の大きさにほぼ比例し, 以下の式で表されます.

$$F_{max} = \mu N$$

比例定数の μ を 静止摩擦係数 といい, 物体の材質や乾湿などによって決まります.

動摩擦力 ··· 動いている時の摩擦力で, 加わる力にかかわらず常に一定です. 静止摩擦力の最大値と同様垂直抗力の大きさにほぼ比例し, 以下の式で表されます.

$$F_{max} = \mu' N$$

比例定数の μ' を 動摩擦係数 といい, 物体の材質や乾湿などによって決まります.

一般に, 静止摩擦係数と動摩擦係数には以下の関係が成り立ちます.

$$\mu > \mu' > 0$$

1.2　運動の表し方

等速運動 $\cdots$ 速さが一定の運動のことです．移動距離が $x_0 + vt$ で表されます．

微分による直線運動の変位と速度の表し方 $\cdots$ 時刻 t での位置を $x(t)$, 時刻 t の時の速度 v を $v(t)$ で表すとき, 以下の式が成り立ちます．

$$v(t) = x(t)' = \frac{dx}{dt}$$

等速直線運動 $\cdots$ 直線的に進む等速運動です．

微分による直線運動の加速度の表し方 $\cdots$ 時刻 t での位置を $x(t)$, 時刻 t の時の速度 v を $v(t)$, 時刻 t の時の加速度 a を $a(t)$ で表すとき, 以下の式が成り立ちます．

$$a(t) = v(t)' = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

等加速度直線運動 $\cdots$ 加速度が一定で直線的に進む運動です．速度が $v_0 + at$ で表され, 位置は $x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ で表されます．
また, $x_0 = v_0 = 0$ のときは, 以下の式が成り立ちます．

$$v = at, x = \frac{1}{2}at^2, v^2 = 2ax$$

自由落下運動 $\cdots$ 物体を初速度 0 で落とした時の運動です．かかる加速度を重力加速度といい, およそ 9.8 [m/s^2] です．速度 $v = gt$, 変位 $x = \frac{1}{2}gt^2$ で表されます．

鉛直投げ上げ $\cdots$ 物体を初速度 v_0 で真上に投げ上げたときの運動です．これも重力加速度がかかる等加速度直線運動で, $v = v_0 - gt$, $x = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$ で表され, 速度が 0 になる $t_1 = \frac{v_0}{g}$, 地面に落ちる $t_2 = 2t_1 = \frac{2v_0}{g}$ で表されます．

曲線運動での変位 $\cdots$ 曲線運動の場合は変位をベクトル $\vec{r}$ で表します．

曲線運動での速度 $\cdots$ 変位 $\vec{r}$ はベクトルのため, x 成分と y 成分があります．そのため, 速度も両方を微分したもののベクトルとなっています．

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

曲線運動での加速度 $\cdots$ 先ほどと同様, x 成分と y 方向の両方を微分します．

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

曲線では, <u>速さが変わらなくても, 速度の方向が変われば加速度は 0 ではない</u> という特徴があります．

1.3　運動の法則

運動の第 1 法則 (慣性の法則)$\cdots$ 止まっているものは止まっているまま, 動いているものは動いているままでいようとする, という法則です. 力の作用を受けていないか, 合力が 0 の時に適用されます. 要するに「車は急に止まれない」とか「オフトゥンから出られない」とかいうやつです.

運動の第 2 法則 (運動の法則)$\cdots$ 加速度が力の方向と質量によって決まる, という法則です. 加速度は力に比例し, 質量に反比例します. ニュートンの運動方程式は mrt さんの授業で習いましたよね.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

N (ニュートン)$\cdots$ 質量 1[kg] の物体に 1[m/s^2] の加速度を生じさせる力の大きさです.

質点 $\cdots$ 広がりがなく, 1 点に質量が集まっていると考えた物体です.

運動の第 3 法則 (万有引力)$\cdots$ 全ての物体の間にある, 他のものを引き寄せる力のことです. 万有引力は質量に比例し距離の 2 乗に反比例します. 質量が m_1 と m_2 で距離が r のとき, お互いに $G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ の力で引き合います. G は重力定数と呼ばれ, 約 6.67×10^{-11} [m^3/(kg·s^2)] です.

作用反作用の法則 $\cdots$ 物体 A が物体 B に力を作用させるとき, B も A に対して同じ力を作用している, という法則です. 要するに「殴ってる先生も痛いんだぞ」というやつです.

1.4 等速円運動

等速円運動 $\cdots$ 質点が原点を中心に半径 r の円周上を一定の速さ v で ~~華麗にに花弁散らすように~~回る運動のことです．位置は主に極座標で表し，$\theta(t) = \omega t$ で表されます．

角速度 $\cdots$ さっきの式の ω のことです．単位は [rad/s] で，1 秒あたりにどれだけ回転するかを表します．

直交座標への変換 $\cdots$ 先ほどの式を直交座標系に変換するときは，以下の式を使います．

$$x = r\cos\omega t$$
$$y = r\sin\omega t$$

等速円運動の速度 $\cdots$ 単位時間あたりの変位 $s = r\theta = r\omega t$ のため，速度は以下の式で表されます．

$$v = \frac{s}{t} = \frac{r\omega t}{t} = r\omega$$

質点の位置ベクトル r との関係は以下のようになっています．

$$v_x = -v\sin\omega t = -r\omega\sin\omega t$$
$$v_y = v\cos\omega t = -r\omega\cos\omega t$$

等速円運動の加速度 $\cdots a = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right|$ で，$|\Delta\vec{v}| \fallingdotseq v\Delta\theta = r\omega \times \omega\Delta t = r\omega^2\Delta t$ のため，

$$a = r\omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r}$$

と表されます．最後の辺から分かるように，速度の 2 乗に比例し，半径に反比例します．

向心加速度 $\cdots$ 等速円運動をしている物体の加速度は，位置ベクトルに逆向きで，円の中心を向いています．そのため，ベクトルで $\vec{a} = -\omega^2 r$ と表され，以下の式が成り立ちます．

$$a_x = -\omega^2 x = -r\omega^2\cos\omega t, \quad a_y = -\omega^2 y = -r\omega^2\sin\omega t$$

回転数と角速度 $\cdots$ 角速度は単位時間あたりの回転角度です．また，1 周あたりの回転角度は 2π [rad] のため，単位時間あたりの回転数を f とすると，以下のように表せます．

$$\omega = 2\pi f$$

ヘルツ (Hz)$\cdots$ 単位時間あたりの回転数や振動数の単位です．

周期 $\cdots$ 1 周あたりにかかる時間で，文字 T で表します．

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

周期運動 $\cdots$ 等速円運動のように，1 周期経過すると位置も速度も同じになる運動のことです．例えば振り子は周期運動をします．

2　力と運動

2.1　放物運動

放物運動 $\cdots$ 初速 v_0 で角度が θ_0 の方向に投げた時の運動です. 軌跡が放物線になります.
放物運動の初速度 $\cdots$ この時, 初速度をベクトルで表すと,

$$\vec{v_0} = (v_0 \cos\theta_0, v_0 \sin\theta_0)$$

となります.
放物運動の加速度 $\cdots$ 空気抵抗を無視すると, 物体にかかる力は重力だけになるため, 物体の質量を m とすると, 運動方程式は以下のようになります.

$$ma_x = 0, ma_y = -mg$$

そのため, 加速度は以下のようになります.

$$a_x = 0, a_y = -g$$

放物運動の速度 $\cdots$ 水平方向は加速度が 0 のため, 等速運動になります. 一方鉛直方向は重力加速度がかかるため, 等加速度運動になります.

$$v_x = v_0 \cos\theta_0, \quad v_y = v_0 \cos\theta_0 - gt$$

放物運動の変位 $\cdots$ 以下のようになります.

$$x = (v_0 \cos\theta_0)t, \quad y = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

最高点 $\cdots$ 到達時刻は鉛直投げ上げ運動と同様です. 高さは鉛直方向の変位の式に t_1 を当てはめた式で求められます.

$$t_1 = -\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$$
$$H = \frac{(v_0 \sin\theta_0)^2}{2g}$$

落下点 $\cdots$ 地面に落下する時刻は鉛直投げ上げ運動と同様です. 開始点からの直線距離は水平方向の変位の式に t_2 を当てはめた式で求められます.

$$t_2 = 2t_1 = -\frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}$$
$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

同じ初速で投げるときに最も遠くまで届くのは $\sin 2\theta = 1$ となる $\theta_0 = 45^\circ$ のときです. その時の直線距離は, $R = \dfrac{v_0^2}{g}$ となります.

2.2　雨滴の落下

粘性抵抗 $\cdots$ 流体 (液体や気体) の中を移動する物体は, 抵抗力を受けます. 物体の速さ v が小さい時に受けるものを粘性抵抗といい, 大きさ F は速さに比例します.

$$F = bv \quad (h \text{ は定数})$$

ストークスの法則 $\cdots$ 半径 R の球体に対する粘性抵抗の大きさは以下の式で表される, という法則です.

$$F = 6\pi\eta Rv$$

上の式で, η は流体の粘度です.

慣性抵抗 $\cdots$ v が早くなり, 物体の後ろに渦ができるようになった時の抵抗です. 大きさ F は速さの 2 乗に比例します.

$$F = \frac{1}{2}C\rho Av^2$$

ρ は流体の密度, A は物体の断面積, C は抵抗係数です. 抵抗係数は球だと約 0.5, 流線型だともっと小さくなります. また, 音速以上になると衝撃波が生じるため, 上の式は当てはまらなくなります. ⬅⇨P

雨滴の落下 $\cdots$ 風がない状態で, $t = 0$ の時に止まっていた (速さが 0 だった) 雨粒の運動を考えます. 鉛直下向きを $+x$ 方向とすると, 重力 mg と粘性抵抗 bv があるため, 合力は $F = mg - bv$ です. そのため, 運動方程式は

$$ma = m\frac{dv}{dt} = mg - bv$$

となります.

終端速度 $\cdots$ はじめは速度が遅く粘性抵抗が小さいため, $mg - bf \fallingdotseq mg$ ですが, 速くなるにつれて抵抗が大きくなり, $v_t = \frac{mg}{b}$ になると, 合力が 0 になって一定の速度で落ち続けるようになります. この時の速度が終端速度で, 雨粒が地面に落ちるときは終端速度に達しているため等速運動をしています.

2.3 振動

フックの法則 $\cdots$ 固体を変形させた時に, 変形を元に戻そうとする復元力がはたらきます. 復元力の大きさは変形の大きさに比例する, というのがフックの法則です.

弾力 $\cdots$ フックの法則における復元力のことです. 弾力を F, 変形量を x とすると, フックの法則は以下の式で表されます.

$$F = -kx$$

物体の変形とは逆方向に復元力が働くことに注意してください.

弾性定数 $\cdots$ 比例定数 k のことで, 常に正の値です.

単振動 $\cdots$ フックの法則にしたがう復元力による運動のことです. 例としてはブランコや振り子などが挙げられます. 復元力以外の力が無視できれば, 運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

です.

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

とおくと,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

になります. 変位は以下の式で表されます.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \beta)$$

角振動数 $\cdots$ 上の式の ω のことで, 1 秒あたり何回振動するかを表します.

振幅 $\cdots$ 上の式の A のことで, 変位の最大値を表します.

初期位相 $\cdots$ 上の式の β のことで, 最初の角度を表します.

単振動の速度 $\cdots$ 変位の式を微分します.

$$\begin{aligned} v(t) &= \{A\cos(\omega t + \beta)\}' \\ &= -\omega A\sin(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

単振動の周期 $\cdots$ 1 周期分の時間のため, 以下の式で表されます.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

単振動の振動数 $\cdots$ 周期の逆数です.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

これもヘルツ (Hz) で表します.

単振り子 $\cdots$ ひもの上端を固定し, 下端におもりをつけ, 鉛直線を含む平面で小さな振幅の振動をさせる装置です. 要するに振り子. ひもの長さを L, ひもの張力を S, おもりの質量を m とすると, おもりを運動させる力は重力のおもりの軌道が描く弧の接線方向の成分 F です. 振り子が鉛直線から θ ズレた状態だと,

$$F = -mg\sin\theta$$

になります.

おもりの接線方向の運動方程式 $\cdots$ 弧の長さが $L\theta$ のため, おもりの加速度の接線方向成分は $\dfrac{d^2(L\theta)}{dt^2} = L\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ です. そのため, 運動方程式は以下のようになります.

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

ここで, 振り子の揺れが小さい場合には $\sin\theta \fallingdotseq \theta$ です. また, $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$ とおくと,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$

と表せ, 単振動の運動方程式の x を θ で置き換えた式になります.

単振り子の振動数と周期 $\cdots$ 以下の式で表せます.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$
$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

等時性 $\cdots$ 上の式から分かるように, 単振り子の振動周期は振動の大きさによらず一定である, という性質です.

単振り子による重力加速度の算出 $\cdots$ 上の式を変形した以下の式で求めることができます.

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

減衰振動 $\cdots$ 摩擦や空気抵抗などで振動のエネルギーが失われ, 振幅が時間と共に短くなる振動です. 速さに比例する抵抗 $-2m\gamma v$ がはたらくときの運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

と, 微分方程式になります. この解は, ω と γ の関係によって

$\omega > \gamma$の場合 (減衰振動) $\quad x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t + \beta\right)$

$\omega = \gamma$の場合 (臨界減衰) $\quad x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$

$\omega < \gamma$の場合 (過減衰) $\quad x(t) = Ae^{-(\gamma-p)t} + Be^{-(\gamma+p)t} \quad (p = \sqrt{\gamma^2-\omega^2})$

のように変化します. ただし, 臨界減衰と過減衰は振動ではありません.

2.4 仕事とエネルギー

仕事 ⋯ 物理学では, 力が物体に作用して, 力と同じ方向に動いたとき, 力は物体に仕事をしたといいます. 力は力の大きさと移動距離の積で, 文字 W を使って表されます.

$$W = Fd$$

- $d > 0$ なら, 力は正の仕事をします. 綱引きでこちら側に綱が引けているときはこれに当たります.
- $d = 0$ なら, 移動していないため力は仕事をしません. 綱引きでは拮抗状態です.
- $d < 0$ なら, 力は負の仕事をします. 綱引きで頑張ってるのに相手の方に引っ張られる時は負の仕事です.

物体の移動方向と仕事 ⋯ 移動した方向と力の方向が一致しない時は, 力の移動方向成分を取り出して考えます.

$$W = F_t d = Fd\cos\theta$$

- θ が鋭角なら, $\cos\theta > 0$ のため仕事は正になります.
- θ が直角なら, $\cos\theta = 0$ のため力は仕事をしません.
- θ が鈍角なら, $\cos\theta < 0$ のため仕事は負になります.

物体を持ち上げる力のする仕事 ⋯ 重力に逆らって鉛直上向きに, 重力より少しでも大きな力を加えれば持ち上がります. わずかな差を無視して $F = mg$ とし, 高さ h まで上げると, 仕事は

$$W = mgh$$

となります.

ベクトルの内積で表した仕事 ⋯ 力と移動を両方共ベクトルで考えると, 内積を使って

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

と表せます.

ジュール ⋯ 仕事の単位です. 記号は [J] で, エネルギーの単位でもあります.

仕事率 ⋯ 単位時間に行われる仕事のことです. 時間 Δt に行われる仕事を ΔW とすると,

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

で表されます. また, $\Delta W = F\Delta d$ のため,

$$P = \frac{F\Delta d}{\Delta t} = F\frac{\Delta d}{\Delta t} = Fv$$

とも表せます. ちなみに仕事率はパワーともいうので, 物理学だと「力こそパワー」は間違った表現になってしまいます.

ワット $\cdots$ 仕事率の単位で, 1 秒に 1[J] の仕事をすると 1[W] になります. 仕事率よりも, 電力の単位でお馴染みですよね.

保存力 $\cdots$ 力 $\vec{F}$ が作用している物体が移動するとき, 行う仕事が経路によらず一定なとき, この力を保存力といいます. 例えば, 物が重力によって一定距離落ちるときは常に一定の仕事をするため, 重力は保存力です.

位置エネルギー $\cdots$ 物体の位置によって決まるエネルギーです. 例えば,

重力による位置エネルギー	$U_{\text{重力}}(h) = mgh$
弾力による位置エネルギー	$U_{\text{弾力}}(x) = \frac{1}{2}kx^2$
万有引力による位置エネルギー	$U_{\text{万有引力}}(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$

などがあります.

非保存力 $\cdots$ 摩擦力や粘性抵抗など, 物体の移動経路によって行う仕事が変わる力のことです. 例えば, A から B に移動するとき, 直線距離で行くのと寄り道してから行くのとでは, 非保存力だと仕事が変わってきます.

束縛力 $\cdots$ 垂直抗力など, 仕事をしない力です. ~~束縛して仕事しないとか酷いヒモだ~~

運動エネルギー $\cdots$ 運動する物体は仕事をする能力があり, そのエネルギーは速さの 2 乗と質量に比例します.

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

仕事と運動エネルギーの関係 $\cdots$ 物体が移動するとき, 力が行った仕事の分だけ運動エネルギーが増加します.

力学的エネルギー $\cdots$ 位置エネルギーと運動エネルギーの和です. 保存力と仕事をしない力だけの作用を受けて運動するとき, 力学的エネルギーは一定に保たれます. これが力学的エネルギー保存則です.

摩擦力と熱 $\cdots$ 例えば雨滴が落下するとき, 粘性抵抗は $-bv_t h = -mgh$ の仕事をします. 失われた力学的エネルギーは, 摩擦熱に変化します.

内部エネルギー $\cdots$ 分子の熱運動の運動エネルギーと分子間力の位置エネルギーの総和です.

エネルギー保存則 $\cdots$ 閉じた系の中では, エネルギーの送料が常に一定に保たれる, という法則です. この法則は, 内部エネルギーの増加を ΔU, 化学エネルギーの増加を $\Delta E_{\text{化学}}$, 運動エネルギーの増加を ΔK, 外部からの仕事を W, 外部からの熱を Q とすると,

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\text{化学}} = W + Q$$

と表せます. また, 仕事や熱の元も系に含めると, $W = Q = 0$ のため,

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\text{化学}} = 0$$

となります.

2.5　運動量

運動量 $\cdots$ 物体の質量と移動速度の積です.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

力積 $\cdots$ 力 $\vec{F}$ と作用した時間 Δt の積です. 運動量の変化は, その間に作用した力積に等しい, という法則があります.

$$m\vec{v'} - m\vec{v} = \vec{F}\Delta t$$

運動量と力積の関係 $\cdots$ 上の式の両辺を Δt で微分すると, 運動方程式 $m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ は以下のように表せます.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

運動量保存則 $\cdots$ 互いに力を及ぼし合っても, 他から力が働かない 2 個の物体の運動量の総和は, 常に一定に保たれるという法則です. 例えば, 丸太同士がぶつかって移動方向や速さが変わっても, 運動量の総和は変わりません. ただし, これが有効なのは 2 つの物体が衝突する時です.

$$m_A\overrightarrow{v'_A} + m_B\overrightarrow{v'_B} = m_B\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B$$

弾性衝突 $\cdots$ 言葉のイメージは柔らかそうですが, 主に堅い物同士の衝突です. 厳密には, 熱や音などの発生に伴うエネルギー損失が無視でき, 運動エネルギーが保存される衝突を指します. 弾性衝突では, 運動量と運動エネルギーの両方が保存します. 式に表すと, 以下のようになります.

$$\frac{1}{2}m_A\overrightarrow{v'^2_A} + m_B\overrightarrow{v'^2_B} = \frac{1}{2}m_B\overrightarrow{v^2_A} + \frac{1}{2}m_B\overrightarrow{v^2_B}$$

非弾性衝突 $\cdots$ 熱が発生したり変形したりして, 運動エネルギーが減少する衝突です. 運動量は保存しますが, 運動エネルギーは保存しません.

2.6 慣性力

慣性系 $\cdots$ 慣性の法則が成り立つ座標系のことです．逆に成り立たない座標系を非慣性系といいます．

慣性力 $\cdots$ 非慣性系で運動の法則を見かけ上成り立っているように見せるための見かけの力です．慣性によって停止している時 (例えば電車の中にキャスター付きのトランクがあって, 発車してもトランクが動かない時), トランクの運動方程式は, $m\vec{a}=\vec{0}$ です．しかし, 電車の加速度を $\vec{a_0}$ とした時, 電車の中からするとトランクは逆向きの加速度 $-\vec{a_0}$ で動くように見えます．そのため, 慣性力の運動方程式は以下のようになります．

$$\text{慣性力} = -m\vec{a_0}$$

ちなみに, 慣性力は力を加える物体がないため, あくまでも <u>見かけの力</u> として扱われています．

慣性系と非慣性系 $\cdots$ 先ほどの例だと, 原点を電車の外で考えると慣性系です．トランクは慣性で止まっているだけですからね．しかし, 電車の中で考えると,「何もないのにトランクが動く」という現象が起きています．これが非慣性系で, この時に慣性力を考える必要があります．

ガリレオの相対性原理 $\cdots$ 慣性系に対して等速直線運動をしている座標系は慣性系である, という法則です．これは, 等速直線運動をしている電車の乗客には慣性力が働かない (加速度が 0, つまり $-m\vec{a_0}=0$) ためです．

遠心力 $\cdots$ 例えば, カーブを左に曲がろうとするときは, 左向きの向心力しか受けていません．しかし体は慣性に従って等速直線運動を続けようとするため, 右向きの力が働いているように感じます．このように, 円運動をしている物体に向心力と逆向きに働く力が遠心力です．これも慣性力の一種で, 人工衛星など, 円運動をしている物体に固定した座標系で用いられます．質量 m の物体が, 半径 r, 角速度 ω, 速さ $v=r\omega$ の等速円運動をしているとき, 遠心力は以下の式で表されます．

$$\text{遠心力の大きさ} = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2$$

コリオリの力 $\cdots$ 回転座標系に対して物体が運動しているときは, 遠心力の他にこの慣性力が働きます．中心部からの距離によって回転速度が違うために生じる力です．質量 m の物体が角速度 ω で回転している座標系に対して, 速度 v' で運動しているとき, 物体に働くコリオリの力 F_c は以下の式で表されます．

$$F_c = 2m\omega v' \sin\theta$$

例えば, 台風が常に反時計回りの渦になるのはコリオリの力のせいです．

3 回転運動と剛体

3.1 質点の回転運動

力のモーメント $\cdots$ 後述する角運動量を変化させる原因として考えるもので, 物体を支点の周りに回転させる能力を表す量です. 力の大きさ F と支点から作用点までの距離 l の積で表され, トルクとも呼ばれます.

$$N = Fl$$

回転させようとする向きの違いは, モーメントに正負の符号をつけて区別します. 反時計回りなら正, 時計回りなら負です.
xy 平面に平行な力 $\vec{F}$ が xy 平面上の点 (x, y) に作用するとき, 各成分で表した力のモーメントは以下のようになります.

$$N = xF_y - yF_x$$

角運動量 $\cdots$ 角速度の運動量版と考えてください. 質量 m, 速度 $\vec{v}$, 運動量 $\vec{p} = m\vec{v}$ の質点が点 P にあるとき, 原点の周りの角運動量の大きさ L は, 運動量の大きさと「原点から点 P を通る速度ベクトル $\vec{v}$ におろした垂線の長さ d」の積で表されます.

$$L = pd = mvd$$

例えば, 半径 r の円周上を角速度 ω, 速さ $v = r\omega$ で等速円運動している場合, 角運動量は $L = mvr = mr^2\omega$ になります.
角運動量も力のモーメントと同様に符号をつけるため, 各成分で表すと以下のようになります.

$$L = m(xv_y - yv_x)$$

回転運動の法則 $\cdots$ 質点の角運動量を時間で微分すると, 力のモーメントになる, という法則です. 上の式の両辺を t で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= m(xa_y - ya_x) \\ &= xF_y - yF_x = N \end{aligned}$$

となります.
中心力 $\cdots$ 作用線が常に一定の点 O と物体を結ぶ直線上にあって, その強さが点 O と物体との距離 r だけで決まる場合の力です. 例えば, 重力は地球を中心とする中心力に当たります.
角運動量保存則 $\cdots$ 物体が中心力だけの作用を受けて運動するとき, 力の中心の周りの角運動量は一定になる, という法則です. 中心力の作用線は必ず中心を通るため, $l = 0$ となりモーメントは 0 になります. そのため, $\frac{dL}{dt} = 0$ となり, L が一定値になることがわかります.
面積速度 $\cdots$ 点 O と物体が結ぶ線分が単位時間に通過する面積のことです. 角運動量に比例するため, 角運動量保存則を「物体が中心力の作用だけを受けて運動するとき, 力の中心に対する面積速度は一定である」と言い換えることもできます.

3.2　万有引力の法則と惑星, 衛星の運動

ケプラーの法則 $\cdots$ 惑星の運動に関する法則で, 以下の 3 つがあります.

1. 惑星の軌道は, 太陽を 1 つの焦点とする楕円である.
2. 太陽と惑星を結ぶ線分の面積速度は一定である.
3. 惑星の公転周期 T の 2 乗と軌道の長軸半径 a の 3 乗の比は, 全ての惑星について同じである. $\left(\dfrac{a^3}{T^2} = \text{一定}\right)$

3.3　剛体のつり合い

剛体 $\cdots$ 大きさがあり, 力を加えてもまったく変形しない仮想物体のことです.
剛体の重心の重要な性質 $\cdots$ 重心については後述しますが, 剛体の重心は以下の 2 つの重要な性質があります.

- 剛体の各部分に作用する重力の合力が重心に作用する
- 剛体の重心は, 各部分にかかる外力の合力が作用している, 同じ質量の質点と同じ運動をする

質量 M の剛体の加速度を $\vec{A}$, 外力の合力を $\vec{F}$ とすると, 運動方程式は以下のようになります.

$$\vec{F} = M\vec{A}$$

剛体のつり合い $\cdots$ いくつかの力が剛体に加わるとき, 剛体が静止し続けていたら, それらの力はつり合っています.

- 合力が $\vec{0}$
- モーメントの和が 0

という 2 つの条件をどちらも満たさないと, つり合いではありません. たとえば合力が $\vec{0}$ でなければ剛体は移動し, モーメントの和が 0 でなければ剛体は回転します.
安定なつり合いと不安定なつり合い $\cdots$ 物体をつり合いの状態から少しズラした時, 復元力が働くのが安定なつり合い, 働かないのが不安定な釣り合いです. 例えば, やじろべえは安定なつり合いです.

3.4　重心

重心 $\cdots$ 剛体の各部分に働く重力の合力が作用する点のことです. 重心を支えれば, 1 点だけで剛体を支えられます. 例えば, 円の重心は中心, 三角形の重心は頂点の対辺の中点を結ぶ線が交わる点です.

2 つの球の重心 $\cdots$ 軽い棒の両端 P と Q に質量 m_1 と m_2 の小さな球を固定します. この時, それぞれの球には $m_1 g$ と $m_2 g$ の重力がかかり, その合力は PQ を $m_2 : m_1$ に内分する点 G を通ります. 質量とは逆の順番なので気をつけてください. 合力は点 G を通り, 鉛直上向きで大きさが $(m_1 + m_2)g$ の力とつり合います. このとき, 点 G が 2 つの球の重心です.
質量 m_1 の球の中心位置を $\vec{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$, m_2 の球の中心位置を $\vec{r_2} = (x_2, y_2, z_2)$ とすると, 重心 G の位置 $\vec{R} = (X, Y, Z)$ は以下のように表されます.

$$R = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}$$

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \quad Z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$$

剛体の重心 $\cdots$ 剛体の重心の位置を求めるために, 小さな部分に分割して考えます. 簡単にするため, 今回は x 座標と y 座標だけで計算しましょう. 分割した質量 $m_1, m_2, m_3, \cdots$ の小さな物体 (質点) が, それぞれ点 $\vec{r_1} = (x_1, y_1), \vec{r_2} = (x_2, y_2), \vec{r_3} = (x_3, y_3), \cdots$ にあるとき, 剛体の重心の位置 $\vec{R} = (X, Y)$ は以下のように表されます.

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + m_3\vec{r_2} + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}, \quad Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$

剛体の重心の運動方程式 $\cdots$ 質量 M の剛体の重心 $R = (X, Y, Z)$ が, 力 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ の作用を受けて運動しているとき, 運動方程式は以下のようになります.

$$M\vec{A} = \vec{F}$$

$$MA_x = M\frac{d^2X}{dt^2} = F_x, \quad MA_y = M\frac{d^2Y}{dt^2} = F_y, \quad MA_z = M\frac{d^2Z}{dt^2} = F_z$$

3.5　剛体の回転運動

慣性モーメント $\cdots$ 長さが l の固定された棒に質量 m のおもりをつけて角速度 ω で回転させるとき，角運動量 $L = ml^2\omega$ です．この時，$I = ml^2$ とおくと，

$$L = I\omega$$

と表せます．この時の I を慣性モーメントといい，これを使うと運動エネルギーを

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

と表せます．

固定軸のある剛体の運動と慣性モーメント $\cdots$ 質点だけでなく，固定軸のある剛体の回転運動でも慣性モーメントが使えます．剛体の場合は重心と同様に小さく分割して考え，その総和で慣性モーメントを表します．角運動量と運動エネルギーは以下のように表されます．

$$L = (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + \cdots)\omega = \sum_{i=1}^{n} m_i l_i^2 \omega$$
$$K = \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + \cdots)\omega^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i l_i^2 \omega^2$$

この場合，慣性モーメントは以下のように表されます．

$$I = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + \cdots = \sum_{i=1}^{n} m_i l_i^2$$

慣性モーメントを使った角運動量や運動エネルギーの表し方は，先ほどと同様です．

固定軸の周りの剛体の回転運動の法則 $\cdots$ 分割した i 番目の部分の回転法則は，

$$\frac{dL_i}{dt} = N_i$$

です．これは i 番目の部分に作用する力のモーメントです．これを剛体全体で考えると，

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(L_1 + L_2 + \cdots)}{dt} = N_1 + N_2 + \cdots = N$$

となります．$L = I\omega$ のため，上の式は以下のように変形できます．

$$\frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = N$$

角加速度 $\cdots$ 上の式の $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ のことで，文字 α で表します．

固定軸の周りの剛体の回転運動と x 軸に沿っての直線運動との対応 $\cdots$ それぞれの運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F \quad (ma = F)$$
$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = N \quad (I\alpha = N)$$

を比較すると, 以下のような対応関係があります.

慣性モーメント I	質量 m
角位置 θ	位置座標 x
力のモーメント N	力 F
角速度 ω	速度 v
角加速度 α	加速度 a
角運動量 $L = I\omega$	運動量 $p = mv$
運動エネルギー $K = \frac{1}{2}I\omega^2$	運動エネルギー $K = \frac{1}{2}mv^2$
仕事 $W = N\theta$	仕事 $W = Fx$
仕事率 $P = N\omega$	仕事率 $P = Fv$

剛体の平面運動 $\cdots$ 剛体の全ての点が一定の平面に平行に動く運動のことで, 円柱が平らな斜面を転がる運動などがその例です. xy 平面だと, 剛体の位置を決めるには, 重心 G の座標 X, Y の他, xy 平面にある剛体のもう 1 つの点 P が必要です. これは有向線分 GP と x 軸との角 θ から決められるため, 剛体の平面運動を調べるには重心の座標と回転角の従う運動法則が必要です.
重心 G の従う運動方程式は以下のとおりで,

$$MA_x = M\frac{d^2X}{dt} = F_x, \quad MA_y = M\frac{d^2Y}{dt} = F_y$$

重心を通り z 軸に平行な直線の周りの回転運動の運動方程式は, 以下のとおりです.

$$I_G\alpha = I_G\frac{d\omega}{dt} = I_G\frac{d^2\theta}{dt^2} = N$$

ここで, I_G は直線の周りにおける剛体の慣性モーメント, N は剛体に作用する力のこの直線の周りにおける剛体の慣性モーメント, α は重心の周りにおける剛体の回転の角速度です. 上の式は重心が移動していても成り立ちます.

3.6 ベクトル積で表した回転運動の法則

力のモーメントと角運動量のベクトル $\cdots$ 回転軸には方向があるため, 力のモーメントと角運動量にも方向と向きがあります. そのため 2 つは実はベクトルで, ベクトル積 (外積) で表すことができます. 質量 m で速度 $\vec{v}$ の質点が 点 $\vec{r}$ にあり力 $\vec{F}$ が作用している時, 原点の周りにおける力 $\vec{F}$ のモーメント $\vec{N}$ と角運動量 $\vec{L}$ は,

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

と表され, それぞれの成分は

$$\begin{aligned} N_x &= yF_z - zF_y & L_x &= m(yv_z - zv_y) \\ N_y &= zF_x - xF_z & L_y &= m(zv_x - xv_z) \\ N_z &= xF_y - yF_x & L_z &= m(xv_y - yv_x) \end{aligned}$$

と表されます.

ベクトルを利用した回転運動の法則 $\cdots$ 原点の周りにおける角運動量 $\vec{L}$ を微分すると, 回転運動の法則

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

が導かれます. これは $\vec{L}$ と $\vec{N}$ が平行でない場合にも成り立つ式です.
これを利用すると, 中心力 $\vec{F}$ しか働かない運動では, 力のモーメント $\vec{N} = \vec{0}$ になるため, $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ が一定値になることを導けます.
また, この質点の位置ベクトル $\vec{r}$ は一定のベクトル $\vec{L}$ に垂直な平面上にあるため, 質点は力の中心を含む平面上を運動することが分かります.

参考文献

[1] 基礎物理学

制作:Roadagain