-微積分 II-

-後期中間-

7　偏導関数の応用

7.1　陰関数定理

陰関数 $\cdots$ 変数 x と y の方程式 $F(x,y)=0$ で表され, それが表す曲線の一部分で $y=f(x)$ の形にできる関数です．ただし, $x^2+y^2-1=0$ のように y の値が 1 つだけに定まるとは限りません．(y について解くと $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ になる)

陽関数 $\cdots$ 普通の関数ですが, 陰関数に対してこう呼ばれることがあります.

[7.5] 陰関数定理

関数 $F(x,y)$ で偏導関数が点 $\mathrm{A}(a,b)$ の近くで存在して連続であるとする．点 $\mathrm{A}(a,b)$ で

$$F(a,b)=0,\quad F_y(a,b)\neq 0$$

ならば, 点 A のとかくで

$$F(x,f(x))=0$$

でえあり, $f(a)=b$ であるような関数 $y=f(x)$ が定まる．$f(x)$ は $x=a$ の近くで微分可能であり, その導関数については次の式が成り立つ.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

曲線の接線と法線 $\cdots$ 曲線 $y=f(x)$ 上の点 (a,b), $b=f(a)$ における接線と法線は, 次の式で表されます.

$$\begin{aligned}&\text{接線}\quad y-b=f'(a)(x-a)\\&\text{法線}\quad x-a+f'(a)(y-b)=0\end{aligned}$$

陰関数定理を使うと, 曲線 $F(x,y)$ は

$$f'(a)=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}=-\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,b)}$$

となるので, 以下の定理が成り立ちます.

[7.6]

曲線 C : $F(x, y) = 0$ 上の点 $\mathrm{A}(a, b)$ における接線及び法線は, 次の方程式で表される.

$$\text{接線} \quad F_x(a,b)(x-a) + F_y(a,b)(y-b) = 0$$
$$\text{法線} \quad F_y(a,b)(x-a) = F_x(a,b)(y-b)$$

特異点 $\cdots$ 点 $\mathrm{A}(x, y)$ が微分可能でなかったり, $F_x(a,b) = F_y(a,b) = 0$ の場合, A を特異点といいます. この点の接線は色々な状態を示します.

7.2　条件付き極大・極小

関数 $f(x,y)$ の極値について, 方程式 $g(x,y)=0$ を満たす中で変化する時の極値を考えます.

[7.7] ラグランジュの乗数法

関数 $f(x,y)$ で, 2 つの変数 x, y が方程式 $g(x,y)=0$ を満たしながら変化する時, 点 $\mathrm{A}(a,b)$ で極値を取り, その点で $g_x(a,b)\neq 0$ または $g_y(a,b)\neq 0$ ならば, λ をある定数として, 次の式が成り立つ.

$$\begin{cases} f_x(a,b)-\lambda g_x(a,b)=0 \\ f_y(a,b)-\lambda g_y(a,b)=0 \end{cases}$$

8　重積分

8.1　重積分

重積分 $\cdots$ 定積分を 2 変数関数に拡張したものです．関数 $F(x,y)$ が領域 D で連続で常に 0 以上のとき, D をいくつかの正方形に分けて, それを底面とする直方体の体積を足していきます．この正方形をどんどん細かくしていったときの極限値が重積分です．関数 $F(x,y)$ の領域 D における重積分を

$$\iint_D F(x,y)dxdy, \quad \iint_D F(P)dS$$

のように表します.

[8.1]

xy 平面上の領域 D が, x の区間 $[a,b]$ で曲線

$$y=f(x),\ y=g(x), \quad f(x) \geq g(x)$$

と 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれている時, 連続関数 $F(x,y)$ お D における重積分は次の式で与えられる.

$$\iint_D F(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{g(x)}^{f(x)} F(x,y)dy \right\} dx$$

累次積分 $\cdots$ 上式の右辺のことです.

8.2　極座標による重積分

極座標系で重積分をする場合, D は $r = f(\theta), r = g(\theta)$, $\theta = \alpha, \theta = \beta$ で囲まれた図形として表されます.

[8.3]

平面の極座標において, 2 つの半直線 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ と曲線 $r = f(\theta), r = g(\theta) f(\theta) \geq g(\theta)$ で囲まれた領域を D とする. この領域で連続な関数 $F(P)$ の重積分は,

$$\iint_D F(P) dS = \int_\alpha^\beta \left\{ \int_{g(\theta)}^{f(\theta)} F(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr \right\} d\theta$$

r をかけ忘れないように注意してください.

9　1階微分方程式

9.1　微分方程式と解

微分方程式 $\cdots$ 変数と関数, 及びその導関数の間に成り立つ方程式のことです.

階数 $\cdots$ 微分方程式に出てくる導関数の最高次数のことです. 例えば, 第1次導関数しか出てこない場合は1階, 第1次導関数と第3次導関数が出てくる場合は3階の微分方程式です.

解 $\cdots$ 微分方程式を満たすような関数, または微分を含まない変数の間の関係のことです. 例えば, $xy' = 2y$ の解は $y = Cx^2$ です.

任意定数 $\cdots$ 解に含まれることがある定数のことで, 任意の値を取ることができます. 任意定数を含む解を一般解, 任意定数に特定の値を与えて得られる解を特殊解といいます.

初期条件 $\cdots$「$x = a$ のとき $y = b$ である」という条件のことで, これを与えることで任意定数を定めて特殊解を得ることができます.

9.2　変数分離形

変数分離形 $\cdots f(x)$ が x の関数, $g(y)$ が y の関数であるとき,

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

の形の微分方程式です. とくに, $g(y) = 1$ のときは両辺を積分すると解を求められます.

[9.1]

変数分離形微分方程式の一般解は, 次のようになる.

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C \ (C \text{ は任意定数})$$

参考文献

[1] 新編 高専の数学 3

制作:Roadagain