-微積分 II-

-前期期末-

5 積分

5.1 和の極限値としての定積分

関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続で常に $f(x) \geq 0$ の時, その区間で曲線 $f(x)$ と x 軸で囲まれた図形を考えます. 区間 $[a,b]$ を n 等分し, 各小区間ごとの面積を計算して足せば面積が求められます. ここでは大雑把に, 分点 x_i での $f(x)$ を求め, その積を小区間の面積としましょう. すると, n 等分した時に求められる面積 S_n は

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

と表せます. あくまでこれは大雑把なものですが, $n \to \infty$ とすれば小区間の幅は $\Delta x \to 0$ となり, S_n がより正確になり, 最終的に~~死に至る~~正しい面積 S に限りなく近づきます. そのため,

$$S = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \right\}$$

と表せます. これが区間 $[a,b]$ における関数 $f(x)$ の**定積分**です.

[5.1] 定積分の定義

関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続であるとする. $[a,b]$ を n 等分し, 分点を

$$a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n = b$$

のように取るとき, 定積分を次の極限値で定義する.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \right\} \quad \left(\Delta x = \frac{b-a}{n} \right)$$

区分求積法 $\cdots$ 図形の面積や体積などを, 簡単な図形に分けてそれらの面積や体積の和の極限値として求める方法です. 定積分の定義も区分求積法です.

5.2　面積 · 体積

5.2.1　極座標による面積

極座標に関して, 曲線が極方程式

$$r = f(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

で表されているとき, その曲線と半直線 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ で囲まれた図形の面積を求めます. 区分求積法で求めると,

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\{f(\theta_i)\}\Delta\theta$$

になります.

[5.7]

曲線が極方程式 $r = f(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$ で表されるとき, この曲線と 2 つの半直線 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ で囲まれた図形の面積 S は

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{f(\theta)^2\}d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2 d\theta}$$

5.2.2　回転体の体積

回転体の体積は, 次の式で与えられます. 2 年生の復習です.

$$V = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2 dx = \pi\int_a^b y^2 dx$$

5.3 曲線の長さ

曲線が媒介変数方程式

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

で表されているとき, その長さを求めます. なんで?知るか!

$t = a$ の時と $t = b$ の時, x 座標と y 座標の変化をそれぞれ Δx, Δy とすると, その距離は

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

で求められます. この感覚をだんだん短くしていくと, 以下の式が得られます.

[5.8]

曲線が媒介変数方程式

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

で表され, $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}$ が連続ならば, その長さ s は

$$\boldsymbol{s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt}$$

うまい具合に式をこねくり回して $\sqrt{}$ が外れるようにすると良いです.

曲線が関数 $y = f(x)$ で与えられているとき, t を x で置き換えると以下の定理になります.

[5.9]

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で微分可能であり, 導関数 $f'(x)$ が連続ならば, 曲線 $y = f(x)(\alpha \leq x \leq b)$ の名が $\mathrm{s}s$ は,

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

5.3.1 極座標による曲線の長さ

[5.8] で $x = f(\theta)\cos\theta, y = f(\theta)\sin\theta$ とすると, 以下の式が導かれます.

[5.10]

極座標に関して, 曲線が極方程式 $r = f(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$ で表されるとき, その長さ s は

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\{f(\theta)\}^2 + \{f'(\theta)\}^2} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

5.4 広義積分

広義積分可能 $\cdots$ 一部で連続でなかったり, 範囲が無限大でも, その区間で $f(x)$ が収束すれば積分できます. これを広義積分といい, これが可能であることを広義積分可能といいます. 広義積分のパターンは 2 つです.

- 積分範囲の端点で関数が不連続 $\cdots$ 例えば $\dfrac{1}{x}$ は $x=0$ で不連続です.
- 積分範囲が無限大 $\cdots$ 関数の収束 · 発散に伴って結果も変わります.

$$\int_0^b \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \dfrac{b^{1-p}}{1-p} & (p<1\text{ の時}) \\ \infty\text{ に発散} & (p \geq 1\text{ の時}) \end{cases}$$

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \infty\text{ に発散} & (p \leq 1\text{ の時}) \\ \dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}} & (p>1\text{ の時}) \end{cases}$$

6　偏導関数

6.1　2 変数関数

2 変数関数 $\cdots$ 実数 x, y, z

$$z = f(x, y)$$

のような関数のことです．例えば, 3 次元の直線は 2 変数関数です．

多変数関数 $\cdots$ 変数が 2 つ以上ある関数の総称です．

定義域 $\cdots$ 関数の変数 (2 変数関数なら (x, y)) が移動できる範囲です．例えば, $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ の場合, ~~金剛~~根号の中が 0 以上でなければいけないので, $x^2 - y^2 \geq 0$ を満たす範囲が定義域です．

極限値 $\cdots$ 点 $\mathrm{P}(x, y)$ が 1 点 $\mathrm{A}(a, b)$ に限りなく近づくとき, $f(x, y)$ が収束する値です．収束する値を C とすると, $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = C$ と書きます．

ちょっとややこしい極限値 $\cdots$ 分母や log の中が 0 になったり, 根号の中が負になったりするときは, ただ値を突っ込んで極限値を求めることができません．そのため, ちょっと工夫をして求めます．極座標で表す $\cdots x$ と y を極座標で表し, $r \to 0$ として極限値を求めます．

連続 $\cdots$ 1 点と区間, それぞれで定義があります．

- 1 点 $\cdots$ 点 (a, b) において, $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$ であることです．
- 区間 $\cdots$ 区間 D において, グラフの段差がないこと です．

6.2　偏導関数

偏微分 $\cdots$ 関数 $f(x, y)$ は, y を一定の値に定めると x の一変数関数とみなせます．この状態で微分するのが偏微分です．

偏微分係数 $\cdots$ どちらかの値を一定値に固定した時の微分係数のことで, x についてのそれは $y = b$ として

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

で表します．

偏導関数 $\cdots$ 2 変数関数を 1 つの変数で偏微分した導関数で,

$$f_x(x, y), z_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$
$$f_y(x, y), z_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

のように表します．

例えば, $f(x) = x^2y - 3xy^2$ のとき,

- x で偏微分すると $z_x = 2xy - 3y^2$
- y で偏微分すると $z_y = x^2 - 6xy$

になります．

6.2.1　高次偏導関数

高次偏導関数 $\cdots$ 偏導関数の偏導関数です．第 2 次偏導関数の場合，z_{xx}，z_{xy} のように表します．基本的に，$z_{xy} = z_{yx}$ とは限りませんが，一定の条件を満たせば同じになります．

[6,1]

$z = f(x, y)$ について，f_{xy}，f_{yx} が存在して連続ならば

$$f_{xy} = f_{yx}$$

6.3　合成関数の偏導関数

合成関数 $\cdots$ 多変数関数 $f(x, y)$ のパラメータが関数になっているものです．媒介変数 t によるものでは，$f(x(t), y(t))$ になります．

[6.2]

$z = f(x, y)$ の偏導関数 f_x，f_y が連続であり，変数 x，y が変数 t の微分可能な関数ならば，$z = f(x(t), y(t))$ は t の微分可能な関数であり，

$$\boldsymbol{\frac{dz}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

[6.3]

x，y が変数 u，v の関数

$$x = \phi(u, v), y = \phi(u, v)$$

ならば，$z = f(x(u, v), y(u, v))$ は u，v の関数になり

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

6.4　2 変数関数の平均値の定理

[6.4]

点 A(a,b) の近くで関数 $f(x,y)$ の偏導関数が存在して連続ならば,

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + hf_x(a+\theta h, b+\theta k) + kf_y(a+\theta h, b+\theta k)$$

が成り立つような $\theta(0<\theta<1)$ が存在する.

6.4.1　全微分

ちょっとわかりづらいので文字を

$$x=a, y=b, \theta h = \Delta x, \theta k = \Delta y$$

と置き換えてみます. また, $f(a,b)$ を左辺に移項しましょう.

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f_x(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)\Delta x + f_y(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)\Delta y$$

この式で, 左辺は z の増分になっています. ここで, 増分の近似式を求めると,

$$\Delta z \fallingdotseq f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

が得られ, この右辺を df または dz で表します.
全微分 $\cdots$ 上の式の df のことで,

$$df = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

で表します.

6.4.2　誤差

全微分を使うと増分の近似値が分かるので, 関数の誤差が求められます.

7　偏導関数の応用

7.1　2 変数関数の極大 · 極小

極大 $\cdots$ 関数 $f(x,y)$ で, 点 A(a,b) の近くの点 P(x,y), P$\neq$A に対して, 常に

$$f(a,b) > f(x,y)$$

となるような点です.
極小 $\cdots$ 極大と同様ですが,

$$f(a,b) < f(x,y)$$

となっています.

1 変数関数では, 極値に以下のような定理がありました.

[7.1]

関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値を取り, その点で微分可能ならば

$$f'(a)=0$$

2 変数に関しても, 同様に次の定理が成り立ちます.

[7.2]

関数 $f(x,y)$ が点 $\mathrm{A}(a,b)$ で極値を取り, その点で偏微分可能ならば

$$f_x(a,b)=0, \quad f_y(a,b)=0$$

[7.4]

関数 $f(x,y)$ の第 2 次偏導関数が点 $\mathrm{A}(a,b)$ の近くで存在して連続であり,

$$f_x(a,b)=0, \quad f_y(a,b)=0$$

であるとする.

$$H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-\{f_{xy}(x,y)\}^2$$

とおくとき,

(1) $H(a,b)>0$ の場合

$f_{xx}(a,b)>0 \Rightarrow f(x,y)$ は点 A で極小になる

$f_{xx}(a,b)<0 \Rightarrow f(x,y)$ は点 A で極大になる

(2) $H(a,b)<0$ の場合, $f(x,y)$ は点 A で極値を取らない.

$H(a,b)=0$ の時には判定できないので, 別の方法を使う必要があります.

参考文献

[1] 新編 高専の数学 3

制作:Roadagain