-微積分II-
-前期中間-

目 次

1 テイラーの定理 **2**

1.1 べき級数 2

1.2 高次導関数 3

1.3 テイラーの定理 4

2 いろいろな不定積分 **6**

2.1 おもな関数の不定積分 6

2.2 分数関数の積分 8

2.3 $\sin x, \cos x$ の分数関数の積分 8

3 定積分とその応用 **9**

3.1 和の極限値としての定積分 9

1　テイラーの定理

1.1　べき級数

べき級数 $\cdots$ 無限級数のうち,

(1)
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

(2)
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \cdots + a_n (x-c)^n + \cdots$$

のような形のものを**べき級数**または**整級数**といいます. ただし, $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ と c は定数です.

べき級数の n 次の項までの部分和

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

を考えて, 部分和のつくる数列 $\{S_n(x)\}$ の発散と収束に従って, **収束**または**発散**する, といいます.

べき級数の和 $\cdots$ べき級数を $f(x)$ で表すと,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$$

になります. べき級数が収束するとき, $f(x)$ の値をべき級数の和といいます. x の値によって収束したり発散したりするので気をつけてください.

[3.1]

べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x = r$ のときに収束すれば, $|x| < |r|$ であるすべての x で収束する.

収束域 $\cdots$ べき級数が収束するような x の区間のことです. 性質として, 原点を中心に左右対称になります.

収束半径 $\cdots$ 区間 $(-r, r)$ では収束し, $|x| > r$ の時は発散するような r のことです. 収束半径が r のとき, 収束域は $-r < x < r$ です. $x = \pm r$ では, 収束することも発散することもあります.

[3.2]

べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について次の極限値 r が定まるならば, $r = \infty$ または 0 の場合も含めて, r は収束半径である.

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_n + 1} \right|, r = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

1.2　高次導関数

$$y = f(x): \text{関数}$$
$$y' = f'(x): \text{導関数}$$
$$y'' = f''(x): \text{第 2 次導関数}$$
$$y''' = f'''(x): \text{第 3 次導関数}$$

第 n 次導関数 $\cdots$ 関数 $f(x)$ を n 回微分して得られる関数のことです．以下のように表します．

$$f^{(n)}(x), \quad y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n}(fx)$$

高次導関数 $\cdots$ 第 2 次以上の導関数のことです．1 次のときは単に導関数といいます．

n 回微分可能 $\cdots$ 区間 D で $f(x)$ の第 n 次導関数が存在するとき，$f(x)$ は D で n 回微分可能である，といいます．何回でも微分可能なときは，**無限回微分可能である**といいます．

以下は，基本的な関数の高次導関数です．

$$y = e^x$$
$$y' = y'' = \cdots = y^{(n)} = e^x$$

全区間 R で無限回微分可能です．

$$y = \sin x$$
$$y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$$
$$y = \cos x$$
$$y^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$$

両方共全区間 R で無限回微分可能です．

$$y = (1+x)^p \ (p \text{ は実数}, p \text{ が自然数でないときは } x > -1)$$
$$y^{(n)} = p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)(1+x)^{p-n}$$

p が自然数の時は，全区間 R で無限回微分可能で，$y^{(k)} = k!$, $y^{(k+1)} = y^{(k+2)} = y^{(k+3} = \cdots = 0$ となります．
自然数でない場合は，$y^{(n)}$ は定数にならず，区間 $(-1, \infty)$ で無限回微分可能です．

$$y = \log(1+x) \ (x > -1)$$
$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

区間 $(-1, \infty)$ で微分可能です．これは原始関数が log であるためで，$\dfrac{1}{1+x}$ から始めれば全区間で無限回微分可能です．

1.3　テイラーの定理

1 次の近似式 $\cdots$ 平均値の定理では,

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a) \tag{3}$$

が成り立つ c が a と b の間に必ずあります．しかし, どこにあるかは分からないため, 近い値を求めるために以下の公式が使えます．

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a)$$

これを $y = f(x)$ の $x = a$ のまわりの **1 次の近似式**といいます．

2 次の近似式 $\cdots$ 1 次の式で生まれる誤差を小さくするため, 2 次式を用います．

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2$$

誤差 $\cdots$ 上の 2 つはあくまで近似式であるため, 誤差が生じます． 例えば, 1 次の近似式で発生する誤差は $\dfrac{f''(c)}{2}(x-a)^2$ です．

[3.3] テイラーの定理

> 関数 $f(x)$ が区間 D で $n+1$ 回微分可能ならば, D の任意の 2 点 a, b に対して
>
> $$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$
>
> が成り立つような c が a と b の間に存在する．

近似式を任意の n 次まで展開していくと, a と b の間にある c が出てくる項がある, という定理です．この時, $n = 0$ だと中間値の定理になります．

剰余項 $\cdots$ テイラーの定理における最後の項のことで,

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)(c)}}{(n+1)!}(b-a)^{n-a}$$

で表します．

[3.4] マクローリンの定理

> 関数 $f(x)$ が 0 を含む区間 D で $n+1$ 回微分可能ならば, D の任意の x に対して
>
> $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$
>
> が成り立つような c が 0 と x の間に存在する．

これはテイラーの定理で $a = 0$, $b = x$ とおいた定理です．この場合, 剰余項は

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)(c)}}{(n+1)!}x^{n-a}$$

です.R_{n+1} が小さければ, R_{n+1} の項を覗いた x の n 次式は $f(x)$ の近似式になり, 誤差は R_{n+1} です. 特に, $f(x)$ が無限回微分可能なら, 以下の定理が成り立ちます.

[3.5]

$f(x)$ が無限回微分可能であり, ある範囲の x に対して

$$R_{n+1}(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

ならば, $f(x)$ は次のべき級数で表される.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

マクローリン展開 $\cdots$ 上のべき級数のことです. 上の定理は n を大きくするといくらでも良い近似値を求められるということを示しています.

以下に基本的な関数のマクローリン展開を示します.

(1) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (r = \infty)$$

(2) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \qquad (r = \infty)$$

(3) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad (r = \infty)$$

実数 p と自然数 r について,

$$\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-r+1)}{r!}$$

とおくと,

(4) $$(1+x)^n = 1 + \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} x^2 + \cdots \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} x^n + \cdots$$

これを**拡張された二項定理**といいます.

マクローリン展開による近似値 $\cdots$ マクローリンの定理の剰余項 R_{n+1} を覗いた式は, $x = 0$ のまわりの n 次の近似式で, 誤差は R_{n+1} です.

2　いろいろな不定積分

2.1　おもな関数の不定積分

途中までは 2 年生の復習にあたるので, 公式は一部省略します.

[4.1] 不定積分の公式

(6) $$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

(7) $$\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x} + C$$

(8) $$\int \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C (a \neq 0)$$

(9) $$\int \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C (a \neq 0)$$

(10) $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C (a > 0)$$

(11) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - A}} = \log |x + \sqrt{x^2 + A}| + C (A \neq 0)$$

[4.2] 積分の線形性

$$\int \{f(x) + g(x)dx\} = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

[4.3] 置換積分

$\phi(x) = t$ のとき

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(t)dt$$

[4.4] 部分積分

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

4.4 のおまけとして, 以下の公式があります.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a}\right) + C$$
$$\int \sqrt{x^2 - A}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + A} + A \log |x + \sqrt{x^2 + A}|\right) + C$$

逆三角関数の不定積分 $\cdots f(x) = \sin^{-1} x, g'(x) = 1$ とおいて, 部分積分をします.

$$\begin{aligned}\int \sin^{-1} x dx &= x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

2.2 分数関数の積分

1. 分子の次数が分母より大きい場合は, 割り算をして整式とその余りに分ける
2. 分数部分を部分分数分解する
3. 各項ごとに積分する
4. うまいこと log をまとめる (対数法則を使う)

例えば, $\dfrac{x^3-6x^2+x+26}{x^2-8x+15}$ を積分するときは,

(1) $\dfrac{x^3-6x^2+x+26}{x^2-8x+15} = x+2+\dfrac{2x-4}{x^2-8x+15}$ 　割り算をする

(2) $\dfrac{2x-4}{x^2-8x+15} = \dfrac{3}{x-5} - \dfrac{1}{x-3}$ 　分数部分を部分分数分解する

(3) $\displaystyle\int\left(x+2+\frac{3}{x-5}-\frac{1}{x-3}\right)dx = \frac{x^2}{2}+2x+3\log|x-5|-\log|x-3|+C$ 　各項ごとに積分する

(4) $\dfrac{x^2}{2}+2x+\log\dfrac{|x-3|}{|x-5|^3}+C$ 　うまいこと log をまとめる

少し難しい分数関数の積分 $\cdots$ 割り算をしたあとでも分母が 3 次だと, 部分分数分解で分母が 1 次の項と 2 次の項に分けます. 分母が 2 次の項は~~問題の都合上~~公式に当てはめられることが多いので, それを使いましょう. 例として, $\dfrac{3x+2}{(x-1)(x^2+4)}$ を部分分数分解すると以下のようになります.

$$\begin{aligned}\frac{3x+2}{(x-1)(x^2+4)} &= \frac{1}{x-1}+\frac{x+2}{x^2+4}\\ &= \frac{1}{x-1}+\frac{x}{x^2+4}+\frac{2}{x^2+4}\end{aligned}$$

2.3 $\sin x, \cos x$ の分数関数の積分

三角関数の分数関数の積分は, $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおいて積分します.

3　定積分とその応用

3.1　和の極限値としての定積分

2 年生の時,

1. 定積分を習う
2. 実は定積分は面積だったんだよ!
3. な、なんだってー！

のように習ったと思います．しかし, 発展の際には逆で, 面積を定積分として定義しています．

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geq 0$ として, その区間で曲線 $f(x)$ と x 軸に囲まれた部分を考えると, x 軸上で $[a, b]$ を n 等分し, その分点を

$$a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n = b \tag{5}$$

とします．この分割でそれぞれの間を Δx とおくと,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

と表せます．各小区間で高さが $f(x_i)$ の長方形を考えると, その面積の和は

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{6}$$

となります．

しかし, これでは長方形の和であり, どうしても誤差が出てしまいます．なるべく誤差を少なくするため, $\Delta x \to 0$ とすると, $n \to \infty$ となり, 図形の面積に限りなく近づきます．

$$S = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \right\} \tag{7}$$

これが, 本当の定積分の定義です (ちなみに, $f(x) \geq 0$ でなくても成り立ちます).

[5.1] 定積分の定義

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続であるとする．$[a, b]$ を n 等分し, 分点を式 5 のように取るとき, 定積分を次の極限値で定義する．

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \qquad \left(\Delta x = \frac{b-a}{n}\right) \tag{8}$$

上の定義を見ると, 任意の関数 $f(x)$ について

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

なのは明らかです. ~~猫でもわかります~~

また, $a > b$ のときは,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

と定義します.

このとき, 次の定理が成り立ちます.

[5.2]

$f(x)$ が区間 D で連続である時, D の任意の点 a, b, c に対して

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

これは, 積分範囲を分けてもいいという法則です (実際は 2 つだけでなくいくらでもできます). この恩恵を受けるのはもう少し先になるでしょうか.

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で, 常に 0 以上なら

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \geq 0$$

そのため, $n \to \infty$ とすると, 不等式 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ が成り立ちます. 等号が成り立つのは, $f(x) = 0$ の時だけです. ところで, これを 2 つの関数の差として考えると, 次の定理が成り立ちます.

[5.3]

$f(x), g(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続である時

つねに $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

右側の不等式で等号が成り立つのは, 恒等的に $f(x) = g(x)$ のときに限る.

この定理を $|f(x) \geq f(x)$ で考えると,

$$\int_a^b |f(x)|dx \geq \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

が成り立ちます. 等号が成り立つのは以下略.

[5.4] 積分に関する平均値の定理

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続ならば,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

が成り立つような c が, a と b の間に少なくとも 1 つ存在する.

参考文献

[1] 新編 高専の数学 3

制作:Roadagain