-線形代数-
-後期中間-

15　1次変換

15.2　1次変換の積

点 $\mathrm{P}(x,y)$ が 1 次変換 f によって点 $\mathrm{P}'(x',y')$ に移され, それを更に 1 次変換 g によって点 $\mathrm{P}''(x'',y'')$ に移される変換を 1 **次変換の積**または**合成変換**といいます．$\mathrm{P},\mathrm{P}',\mathrm{P}''$ の関係は以下のようになります．

$$P' = f(P) \quad P'' = g(P') \quad P'' = g(f(P))$$

3 つ目の式を記号 $g \circ f$ で表します．つまり, $(g \circ f)(P) = g(f(P))$ となります．

この時, 点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$, f の変換行列を A, g の変換行列を B とすると, 積 $g \circ f$ の式は $\boldsymbol{x}'' = B(A\boldsymbol{x}) = (BA)\boldsymbol{x}$ です. これは行列 BA で表される 1 次変換とみなせます.

[15.4]

1 次変換 f, g の行列を A, B とするとき, 積 $g \circ f$ は行列 BA で表される 1 次変換である.

もちろん, f と g の順番を入れ替えた合成変換 $f \circ g$ も考えられ, その場合の行列は AB です．必ずしも $AB = BA$ とは限らないため, 基本的には違う変換になります.

また, 同一の 1 次変換を何度か繰り返すときも合成変換とみなし, f^k で表します．例えば, $f \circ f = f^2$ と表します.

点 $\mathrm{P}(x,y)$ を原点 O のまわりに角 α 回転させる変換 f を, 角 α の**回転**といいます．その変換行列は,

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

で表されます.

15.3　1 次変換の逆変換

逆変換とは, 変換されたものを元に戻す変換のことです. f^{-1} で表し, $f \circ f^{-1}$ および $f^{-1} \circ f$ は恒等変換です.

[15.5]

1 次変換 f の行列を A をするとき,

行列 A が正則である $\Leftrightarrow$ f の逆変換 f^{-1}が存在する

逆変換 f^{-1} の行列は A^{-1} である.

[15.6]

1 次変換 f の逆変換が存在するとき,

1. 異なる 2 点は f によって異なる 2 点に移る.
2. 平面全体は f によって平面全体に移る.

[15.7]

1 次変換 f が逆変換を持つとき, f は

1. 任意の直線を直線に移す.
2. 平行な直線を平行な直線に移す.

16　行列式

16.1　行列式の定義

遇順列・奇順列 $\cdots 1,\ 2,\ \cdots n$ で表される数列の順列それぞれが, 何回の交換で自然の順序 $(1,\ 2,\ \cdots n)$ に直すことができるか, というものです. 奇数回で直せるものを奇順列, 偶数回で直せるものを遇順列といいます. ちなみに, 順列の数は $n!$ 個ですが, 奇順列と遇順列はそれぞれ $\dfrac{n!}{2}$ 個数ずつあります.

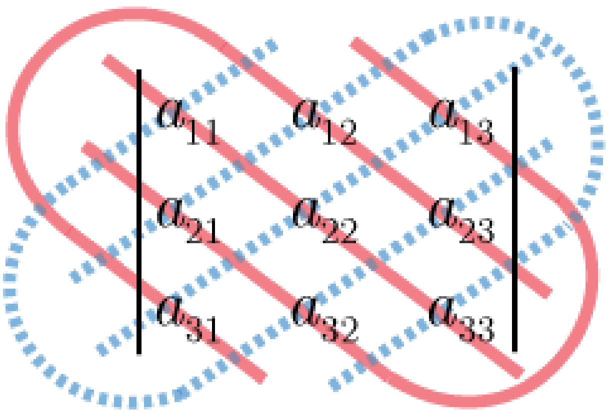
行列式 $\cdots n^2$ 個の数 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ について, n 次の単項式 $\pm a_{i1}a_{j2}\cdots a_{ln}$ を考えます. このとき, 添字の $i, j, \cdots l$ は数字 1,2,$\cdots n$ の順列で, それが奇順列ならば $-$ を, 遇順列なら $+$ を符号とします. 順列の数は $n!$ 個なので, このような単項式も同数作られますね. それらの和が行列式です.
記号で表すと, 以下のようになります.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(ij\cdots l)} (\pm a_{i1}a_{j2}\cdots a_{ln}) \tag{1}$$

正確には, 左辺を**行列式**, 右辺をその**展開式**といいます. 行・列・成分などの用語は, 行列と同じように用いられます.
ただし, **行列と行列式は似ていますが全然違います**. 60 点と 59 点くらい違います.

n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ の各成分の配置をそのままに, 式 (1) のように書き表した n 次の行列式を $\boldsymbol{A}$ **の行列式**といい, $|A|$ または $det(a_{ij})$ で表します.

2 次, 3 次の行列式に関しては**サラスの方法**というやり方が使えます. 斜めに成分を掛けていき, それらに符号を割り当てるやり方です. 2 次は, 逆行列を求める時に使った $D = ad - bc$ という式がありますね. D が行列式の値, $ad - bc$ がサラスの方法を用いた展開式です.
3 次の行列式は, 下の図を見て下さい. 赤い線上にある数の積の符号が $+$, 青い線上にある数の積の符号が $-$ です.



三角行列式 $\cdots$ 対角成分を繋ぐ線から右上 (左下) の成分が全て 0 の行列式です. 値としては, 対角成分の積と等しくなります.

16.2　行列式の性質

以下の定理は 3 次の行列式を例として使いますが, 何次の行列式についても成り立ちます.

[16.1]

行列式の行と列を入れ替えても, その値は変わらない

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

[16.2]

行列式の 1 つの行または列の各成分が 2 つの数の和の形になっている時, その行列式は 2 つの行列式の和で表される.

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2 + a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3 + a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

[16.3]

行列式の 1 つの行または列を k 倍して得られる行列式の値は, もとの行列式の値の k 倍である.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

[16.4]

行列式の 2 つの行または列を交換すれば, その値は符号が変わる.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

[16.5]

次の性質を持つ行列式の値はいずれも 0 である.

1. 1 つの行または列のすべての成分が 0 である.
2. 1 つの行または列の対応する成分が等しい.
3. 2 つの行または列の対応する成分が比例している.

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & ka_1 \\ a_2 & b_2 & ka_2 \\ a_3 & b_3 & ka_3 \end{vmatrix} = 0$$

[16.6]

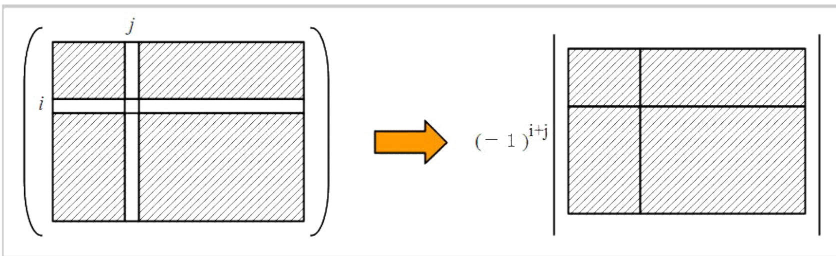
行列式の 1 つの行または列の k 倍を他の行または列に加えたり引いたりしても, 行列式の値は変わらない

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + ka_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + ka_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + ka_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

16.3　行列式の展開と積

余因子 $\cdots$ 行列 $A = a_{ij}$ または行列式 $A = det(a_{ij})$ において, a_{ij} から十字に成分を取り除いて隙間を詰め, それに (-1)$^{i+j}$ を掛けたものが A_{ij} です. (i, j) 成分の余因子といい, A_{ij} で表します.

以下に図 [2] を示します.



行列式で表すとこんな感じです.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

余因子展開 $\cdots n$ 次の行列式を $(n-1)$ 次の行列式の和に直す展開です.　1 行または 1 列について 各成分について余因子を求め, その行列式に成分を掛けた値 を求めると, その合計が行列式の値となります. 余因子展開を利用することで, 4 次以上の行列式も簡単化することができます.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

[16.7]

行列式 $|A|$ の 1 つの行または列の各成分とその余因子の積の和は, 行列式 $|A|$ に等しい.

1 つの行または列の各成分と他の行または列の対応する成分の余因子との積の和は 0 である.

[16.8]

同じ次数の正方行列 $A,\ B$ と積 AB の行列式について

$$|AB| = |A||B|$$

16.4　逆行列と連立 1 次方程式

3 次正方行列の逆行列の求め方です.

[16.9]

正方行列 $|A|$ が正則である $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \text{の逆行列は } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

で与えられる. 大文字 $A_1, B_1, \cdots$ は行列 A の各成分 $a_1, b_1, \cdots$ の余因子を示す.

x, y, z についての連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= p_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= p_3 \end{aligned}$$

を考えてみましょう. 係数行列を A, 未知数の行列を $\boldsymbol{x}$, 右辺の行列を $\boldsymbol{p}$ とすると,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

となります. つまり, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ と表せるわけです.
A が正則であれば逆行列が存在するので, 両辺に左から A^{-1} を掛けて, $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{p}$ となりますね. そこで, 定理 16.5 から逆行列を求めれば, $\boldsymbol{x}$ も求まります.

ですが, ぶっちゃけ面倒くさいですよね. そこで便利なのがクラメルの公式です.

[16.10] クラメルの公式

連立 1 次方程式の係数行列 A が正則ならば, すなわち

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ならば, その解は次の式で与えられる.

$$x = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_1 & p_1 & c_1 \\ a_2 & p_2 & c_2 \\ a_3 & p_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{vmatrix}$$

証明はまたまた割愛しますが, 便利なのでどんどん使いましょう. ~~行列クラスの実装はよ~~

参考文献

[1] 新編 高専の数学 2

[2] CAE のための数学入門

制作:Roadagain