線形代数
-前期期末-

14　行列

14.1　行列

~~M A T R I X~~

行列 $\cdots$ 数を長方形に並べて括弧で囲んだもののことです．各々の数を**成分**, 成分の横と縦の並びをそれぞれ**行**, **列**といいます．ちなみに, 行列は英語だと matrix です．
また, 行列を 1 つの文字, 例えば A や B で表したり, 行と列の数を i, j として $A = \{a_{ij}\}$ と表したりすることもあります．
$m \times n$ **型行列** $\cdots m$ 行 n 列の行列のことです．
i, j **成分** $\cdots$ 第 i 行第 j 列の成分 a_{ij} を指します．
n **次元ベクトル** $\cdots 1 \times n$ 型及び $n \times 1$ 型の行列のことです．前者を**行ベクトル**, 後者を**列ベクトル**といいます．ベクトルを行列として扱うときは列ベクトルとして表すことが多いですね．

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ のとき, A は 2×3 型の行列, B は 3×2 型の行列です．

等しい行列 $\cdots$ 行列 A と B が同じ型で, 且つ対応する成分が全て等しいとき, A と B は等しいといい, $A = B$ と書きます．

零行列 $\cdots$ 型に関係なく, すべての成分が 0 の行列です. 文字 O で表します．

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行列の和 $\cdots$ 同じ型の行列 $A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ について, 各成分をそれぞれ足した行列が $A + B$ となります．異なる型の行列については, 和が定義されません．

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

定数倍 $\cdots$ 行列 A の各成分を k 倍したものを kA で表します．

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix}$$

[14.1] 行列の演算の基本法則

任意の $m \times n$ 型行列 A, B, C,$m \times n$ 型零行列 O および任意の下図 k, l に対して

(1) $$A + B = B + A$$

(2) $$(A + B) + C = A + (B + C)$$

(3) $$A + O = O + A = A$$

(4) $$A + (-A) = (-A) + A = O$$

(5) $$k(lA) = (kl)A$$

(6) $$(k + l)A = kA + lA$$

(7) $$k(A + B) = kA + kB$$

(8) $$1A = A, (-1)A = -A$$

(9) $$0A = O, kO = O$$

14.2　行列の積

n 次正方行列 $\cdots n{\times}n$ 型行列のことです．

対角成分 $\cdots$ 正方行列の左上から右下への対角線上にある成分のことですね．具体的には $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ です．

単位行列 $\cdots$ 対角成分が全て 1 で，その他の成分が全て 0 の正方行列です．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行列の積 $\cdots$ $2{\times}2$ 型行列 A と $2{\times}3$ 型行列 B について，矢印で示した方向に沿って A の各行の成分と B の各列の成分の積の和を作り，それを並べてできる $2{\times}3$ 型行列を AB で表します．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \longrightarrow & \longrightarrow \\ a_{21} & a_{22} \\ \longrightarrow & \longrightarrow \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \downarrow & b_{12} & \downarrow & b_{13} \\ b_{21} & \downarrow & b_{22} & \downarrow & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

$m{\times}n$ 型行列 A と $n{\times}p$ 型行列 B

$$A = (a_{ij}),\ B = (b_{jk})$$
$$i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots n;\ k = 1, 2, \cdots p$$

に対して，A の第 i 行の成分と B の第 k 列の成分の積の和を

$$\boldsymbol{c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}}$$

として，これを (i, k) 成分とする $m \times p$ 型行列 (c_{ik}) を AB と定義します．ちなみに，左側の行列の列数と右側の行列の行数が同じときだけ，行列の積が定義できます．また，<u>$AB = BA$ とは限りません．</u>

左側の行列の第 i 行を左から右に，右側の行列の第 k 列を上から下に取って，その 2 数の積を足していくと，積の行列の (i, k) 成分になります．

[14.2]

行列 A, B, C，単位行列 E，零行列 O について

(1) $$(AB)C = A(BC)$$

(2) $$A(B + C) = AB + AC$$
$$(A + B)C = AC + BC$$

(3) $$AE = A,\ EA = A$$

(4) $$AO = O,\ OA = O$$

また，正方行列 A の k 個の積を A^k と書きます．　$AA = A^2,\ AAA = A^3$

ちなみに，$A \neq O,\ B \neq O$ であっても，$AB = O$ となることがあります．

14.3　逆行列

逆行列 $\cdots E$ を単位行列とすると, 正方行列 A に対して

$$AX = E,\ XA = E \tag{1}$$

となるような正方行列 X のことです. A の逆行列を A^{-1} で表します.

正則 $\cdots$ ある正方行列が逆行列を持つ, ということです. 逆行列を持たない行列もいっぱいあります.

[14.3]

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, $D = ad - bc$ とおく.

- $D \neq 0 \iff A$ が正則である. そのとき逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- $D = 0 \iff A$ が正則でない. 即ち, 逆行列は存在しない.

14.4　連立 1 次方程式

　連立 1 次方程式

(1)
$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

を, 行列を使って解いてみましょう.

(2)
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

とおくと, 上の連立方程式は

(3)
$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$$

と表せます. A が正則なら, (3) の両辺に A^{-1} を左から掛けて,

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{p}$$

となり, 解 $\boldsymbol{x}$ を求められます.

　係数行列 $\cdots$ (3) における A のことです.

　係数行列 A が正則でない場合, 連立方程式は解を無数にもつ場合と解を持たない場合があります.

15　1 次変換

15.1　1 次変換

変換 $\cdots$ あるものとあるものを一対一対応させる規則のことです．例えば, 平面上の 1 点 $P(x, y)$ において

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 3y \end{cases} \tag{1}$$

で与えられる 1 つの点 $P'(x', y')$ を対応させる規則を, 平面上の変換といいます.

変換を記号 f で表し, それが点 P に点 P' を対応させるとき, $f(P) = P'$ と書きます.

像 $\cdots$ 点 P' を変換 f による点 P の像といいます.

1 次変換 $\cdots$ 座標平面上の点 $P(x, y)$ に対して, a, b, c, d を定数として

$$f : \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \tag{2}$$

で与えられる点 $P'(x', y')$ を対応させる変換のことです．変換の式が 1 次式で与えられるのが特徴ですね.

点 P, P' の位置ベクトルを列ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x'} = \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

で表し,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおけば, 行列の積を用いて式 (2) は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{即ち } \boldsymbol{x'} = A\boldsymbol{x} \tag{3}$$

で表せます．行列 A を 1 次変換 f の行列といい, f を行列 A の表す 1 次変換といいます.

恒等変換 $\cdots$ 変換行列が E(単位行列) の変換です．全ての点やベクトルを動かさない変換なので, 恒等変換と呼ばれます.

$$E\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}$$

相似変換 $\cdots k$ を 0 でない定数として, 各点 P を点 $P'(kx, ky)$ に移す変換のことです．原点を中心とし相似比 k の相似変換といいます．変換行列は

$$\begin{pmatrix} x - \prime \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で表されます．特に, $k = 1$ のときは恒等変換です.

[15.1]1 次変換の線形性

1 次変換 f は任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と数 k について次の等式を満たす．この声質を**線形性**という．

(1) $$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$$
(2) $$f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$$

逆に, 平面上の変換 f が線形性 (1), (2) を満たすとき, f は 1 次変換である.

[15.2]

1 次変換 f による基本ベクトル $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ の像が

$$\boldsymbol{e_1'} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e_2'} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

であるとき, f は次の行列で表されます.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

[15.3]

平面上の異なる 2 点を A, B とし, 1 次変換 f によるそれらの像を A', B' とする.

- $A' \neq B'$ ならば, 直線 AB の f による像は直線 $A'B'$ である.
- $A' = B'$ ならば, 直線 AB の全ての点は点 A' に移される.

15　1 次変換

15.2　1 次変換の積

点 $\mathrm{P}(x, y)$ が 1 次変換 f によって点 $\mathrm{P}'(x', y')$ に移され, それを更に 1 次変換 g によって点 $\mathrm{P}''(x'', y'')$ に移される変換を 1 次変換の**積**または**合成変換**といいます．P,P′,P″ の関係は以下のようになります.

$$P' = f(P) \quad P'' = g(P') \quad P'' = g(f(P))$$

3 つ目の式を記号 $g \circ f$ で表します．つまり, $(g \circ f)(P) = g(f(P))$ となります.

この時, 点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$, f の変換行列を A, g の変換行列を B とすると, 積 $g \circ f$ の式は $\boldsymbol{x}'' = B(A\boldsymbol{x}) = (BA)\boldsymbol{x}$ です. これは行列 BA で表される 1 次変換とみなせます.

[15.4]

1 次変換 f, g の行列を A, B とするとき, 積 $g \circ f$ は行列 BA で表される 1 次変換である.

もちろん, f と g の順番を入れ替えた合成変換 $f \circ g$ も考えられ, その場合の行列は AB です．必ずしも $AB = BA$ とは限らないため, 基本的には違う変換になります.

また, 同一の 1 次変換を何度か繰り返すときも合成変換とみなし, f^k で表します．例えば, $f \circ f = f^2$ と表します.

点 $\mathrm{P}(x,y)$ を原点 O のまわりに角 α 回転させる変換 f を, 角 α の**回転**といいます. その変換行列は,

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

で表されます.

15.3　1 次変換の逆変換

逆変換とは, 変換されたものを元に戻す変換のことです. f^{-1} で表し, $f\circ f^{-1}$ および $f^{-1}\circ f$ は恒等変換です.

[15.5]

1 次変換 f の行列を A をするとき,

行列 A が正則である $\Leftrightarrow$ f の逆変換 f^{-1}が存在する

逆変換 f^{-1} の行列は A^{-1} である.

[15.6]

1 次変換 f の逆変換が存在するとき,

1. 異なる 2 点は f によって異なる 2 点に移る.
2. 平面全体は f によって平面全体に移る.

[15.7]

1 次変換 f が逆変換を持つとき, f は

1. 任意の直線を直線に移す.
2. 平行な直線を平行な直線に移す.

参考文献

[1] 新編 高専の数学 2

制作:Roadagain