線形代数

1　空間のベクトルと図形

1.1　空間の図形

x 軸, y 軸, z 軸 $\cdots$ 座標軸.
原点 $\cdots$ 座標軸が交わる点. 座標で表すと $(0,0,0)$
直交座標系 $\cdots$ 座標軸が直角に交わる座標系.~~ぶっちゃけ覚えなくていいんじゃないかな~~

※しばらくは基礎数学 II で習ったベクトルの復習的なことが続くので分かる人はすっ飛ばして下さい

[13.1]

原点 O と点 $P(x,y,z)$ との距離は

$$OP = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

また, 2 点 $P(x,y,z), Q(x',y',z')$ の距離は

$$PQ = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

1.2　空間のベクトルの成分

基本ベクトル $\cdots x$ 成分, y 成分, z 成分 がそれぞれ 1 の 3 つの単位ベクトル (長さが 1 のベクトル).

- $\boldsymbol{e_1} = \overrightarrow{OE_1}(1,0,0)$
- $\boldsymbol{e_2} = \overrightarrow{OE_2}(0,1,0)$
- $\boldsymbol{e_3} = \overrightarrow{OE_3}(0,0,1)$

成分 $\cdots$ ベクトルが始点から終点まで, x 軸方向, y 軸方向, z 軸方向 にそれぞれどれだけ進むかを表したもの. 始点を原点 O にしたとき, 終点の座標はベクトルの成分と同じ.
成分を用いてベクトルを表すと, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ のようになる.

[13.2]

ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ の大きさ $|\boldsymbol{a}|$ は

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$$

[13.3]

ベクトルの和及びベクトルと実数との積は

$$\text{和}\quad (a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$
$$\text{実数との積}\quad k(a_1,a_2,a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

1.3 内積

[13.4]

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の内積は

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

で与えられる．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ の作る角を θ とするとき

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}\sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}}$$

[13.5]

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ について

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

[13.6]

ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ が作る平行四辺形の面積 S は, 次の式で求められる．

$$\begin{aligned} S^2 &= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b})^2 \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 \end{aligned}$$

角度 θ が分かっていれば, $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ でも求められる．

1.4 直線の方程式

方向ベクトル $\cdots$ 直線の向きを表すベクトル. 向きが合っていれば長さはなんでもいい．基本的には文字 $\boldsymbol{v}$ を使って表すことが多い. 気がする. ~~実は v って vector の頭文字だから何にでも使えるってこと, お母さんには内緒だぞ！~~

ベクトル方程式 $\cdots$ 点 $P(x, y, z)$ の位置ベクトル $\boldsymbol{p}$ の成分は

$\boldsymbol{p} = (x, y, z)$

だよね.~~位置ベクトルがわからない?1 年のまとめ見て出直して来い!~~ さて, ここでどこぞに点 $A(a_1, a_2, a_3)$ が現れたとしよう．座標が定数じゃないからって突っ込んじゃいけないよ. そこは自分で決めるんだ．直線 A を通って, 方向ベクトル $\boldsymbol{v}$ が零ベクトルじゃない直線 l は, その上にある任意の点を P として

$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}$

と表せるんだ. この式をベクトル方程式と言うんだよ．t を変化させれば, 直線上のどんな点でも表せるっていう寸法さ.

媒介変数方程式 $\cdots$ ベクトル方程式を各成分ごとに見ていくと出来上がる式のことだね.

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$$

v_1, v_2, v_3 の全てが 0 でなければ, [13.7] の公式が成り立つよ.

[13.7]

点 $A(a_1, a_2, a_3)$ を通り, 方向ベクト $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ の直線の方程式は

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

v_1, v_2, v_3 のどこかが 0 なら, そこだけは分母がなくなるよ.
例えば, $v_3 = 0$ なら, $\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = z - a_3$ になるんだ.

[13.8]

2 点 $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$ を通る直線の方程式は

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3}$$

この式も, どこかの分母を計算して 0 になる場合は分母がなくなるから気をつけてね.

直線 l, m の方向ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ と $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ とする. このとき, 直線が平行か, 直交しているのかについては, 下の定理が成り立つよ.

[13.9]

直線 l, m の方向ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ と $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ とすると,

$$l \parallel m \Longleftrightarrow v_1 : v_2 : v_3 = w_1 : w_2 : w_3$$
$$l \perp m \Longleftrightarrow v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$$

1.5 平面の方程式

点 P_0 を通って, ベクトル $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0})$ に垂直な平面があったとしよう. そうだね, 名前は α とかでいいんじゃないかな. 点 P(P_0じゃないよ) が α 上にあるとしたら, $\vec{P_0P}$ と $\boldsymbol{n}$ は平行なはずだよね. だから, 点 P_0と P の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{p}$ とすると (安直だなんて意見は無視するよ)

(1) $$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p_0}) = 0$$

っていう式が成り立つんだ. で, これを成分で表すと下の方程式が出来上がるんだよ.

[13.10]

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り, ベクトル $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面の方程式は

(2) $$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

方程式 2 で $-(ax_0 + by_0 + cz_0) = d$ とすると,

(3) $$ax + by + cz + d = 0$$

ってなるよね. 式変形は省略したけど作った人にも都合があるから許しておくれ. 方程式 3 は単に 2 を式変形しただけだから, 下の定理が成り立つよ.

[13.11]

$\boldsymbol{n} = (a, b, c) \neq \boldsymbol{0}$ のとき, 1 次方程式

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{3}$$

はベクトル $\boldsymbol{n}$ に垂直な平面を表す.

法線ベクトル $\cdots$ 直線や平面に垂直なベクトルのこと. この節では $\boldsymbol{n}$ で表しているね.
単位法線ベクトル $\cdots$ 長さが 1 の法線ベクトルのこと. 要は $\dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$ のことだよ.
3 点を通る平面の方程式 $\cdots$ それぞれの座標を

$$ax + by + cz + d = 0$$

に当てはめて, 連立方程式として解くんだ. a, b, c が全て d で表せたら, あとは簡単さ. ~~詳しい解説?してる暇ないんでパス~~
2 直線の平行・垂直 $cdots$ これは法線ベクトルが平行か垂直かで分かるよ. 2 つの法線ベクトルが

直交 $\Longleftrightarrow$2 平面は平行
平行 $\Longleftrightarrow$2 平面は直交

直線と平面の交点 $\cdots$ 直線の方程式を媒介変数方程式にして, それを

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

に当てはめるんだ. それぞれの () の中が既に媒介変数方程式で表されてるから, あとは t を求めて直線の方程式に代入するだけさ.

点と平面の距離 $\cdots$ 下の公式を使うといいよ. 詳しい理由が知りたいなら 1 年の復習をしよう.

[13.12]

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ と平面 $ax + by + cz + d = 0$ との距離 h は, 次の式で求められる.

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1.6　球の方程式

空間の中で定点から一定の距離にある点の軌跡を**球面**または単に**球**という。(簡単に言うと空間上に球があるよねっていう話)、定点を**中心**、一定の距離を**半径**という。点 C を中心とし、半径 r の球上の点を P とすれば

$$|\overrightarrow{CP}| = |\boldsymbol{p} - \boldsymbol{c}| = r$$

である。これを球のベクトル方程式を

$$|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{c}|^2 = r^2$$

に点 C,P の座標を代入して

[13.13]

点 $C(a, b, c)$ を中心とし、半径 r の球の方程式は

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

である。とくに、原点 O を中心とし、半径 r の球の方程式は

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

参考文献

[1] 高専の数学 2

制作:Roadagain