微積分 I

1　無限数列 (P18～28)

1.1　無限数列の極限

無限数列 $\cdots$ 項数が無限の数列. どこまでも続く数列. いんふぃにっとしーくえんす. またこの節では, 数列といえば無限数列を示すものとする.

収束 $\cdots$ 数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ において, n を限りなく大きくするとき, a_n が一定の値 A に限りなく近づくなら, **数列 a_n は A に収束する**といい, A を**極限値**という. また, これを記号で

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{または} \quad a_n \to A(n \to \infty)$$

と書く. ちなみに, 記号 lim はリミットと読む (この文脈と状況で ∞ をエイトって読む人は流石にいないよね! 信じていいよね!)
例えば, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ である (分母がどんどん大きくなる $\to$ $\frac{1}{n}$ は 0 に限りなく近付く).
※極限値そのものになっても構わない. 例えば, $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$ である.

発散 $\cdots$ 数列 a_n が収束せず, ずっと増加または減少し続けて <u>絶対値が無限大になっていく</u> とき, **a_n は (正または負の) 無限大に発散する**という. 例えば, $\lim_{n\to\infty} 2n = \infty$ であり, $\lim_{n\to\infty} -2n = -\infty$ である.

振動 $\cdots$ 収束も発散もしない数列は**振動する**という.
例えば, $a_n = (-1)^n$ は振動する (常に-1 か 1 のどちらかしか値を取らないため).
また, $a_n = (-2)^n$ も振動する (絶対値は ∞ になっていくが, 正と負の値を交互に取るため).

数列の極限地について, 次の性質が成り立つ.

[2.1]

数列 a_n, b_n がともに収束するとき,

1. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$　　(複合同順)
2. $\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$　　(c は定数)
3. $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$
4. $b_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ のとき
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$
5. すべての番号 n について $a_n \leq b_n$ ならば
$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

[2.2]

無限等比数列 r^n の収束・発散について, 次の性質が成り立つ.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & (r > 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (r = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (-1 < r < 1 \text{ のとき}) \\ \text{振動する} & (r \leq -1 \text{ のとき} \end{cases}$$

1.2 無限級数とその和

無限級数 $\cdots$ 無限数列 a_n に対して, 各項を形式的に記号 + で結んだ式

(1) $$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

のこと. 単に**級数**ともいう. 記号を使って表すと, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ となる.

第 n 部分和 $\cdots$ 級数 1 の第 n 項までの和

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

のこと. 昨年度習った数列の和は全て第 n 部分和.

級数の収束 $\cdots$ 部分和の作る数列 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ が極限値 S に収束するとき, 級数 (1) は**収束する**といい, S を**級数の和**という. これを式で書くと

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

または

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

となる. 数列 S_n が発散するとき級数 (1) は**発散する**という. 収束・発散の条件については [2.3] や [2.5] で紹介してるからまだ寝るなよ, 絶対寝るなよ! いいか, 絶対寝るんじゃないぞ!

無限等比級数 $\cdots$ 初項 a, 公比 r の無限等比数列 ar^{n-1} から作られる級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

のこと. 無限等比数列の総和を表す式.

[2.3]

初項 $a \neq 0$, 公比 r の無限等比級数が収束するための必要十分条件は

$$|\mathbf{r}| < \mathbf{1}$$

である. そのとき, 級数の和は次の式で求められる.

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

~~理由が気になる?そこまで数学が好きならこのまとめはいらないから教科書を使うことを勧めるぜ!~~

級数の収束・発散は, 部分和の数列 S_n の収束・発散で定義されているから, 数列の極限地の性質 [2.1] から, 次の公式が成り立つ.

[2.4]

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束するとき,

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (c \text{ は定数})$$

[2.5]

(1)
$$\text{級数}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{が収束する} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(2)
$$\text{数列 } a_n \text{が 0 に収束しない} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{\text{は}}\text{発散する}$$

(1) と (2) は対偶である.

2　平均値の定理と応用

テストでは使えるようになれば良いとのことですので、これからは定理をひたすら書いていきます。平均値の定理、コーシーの平均値の定理、ロピタルの定理を使えるようになれば基本的には大丈夫なはずです。詳しい証明の仕方が知りたいという人がいたら教科書を自分で読んでください。

2.1　平均値の定理

[2.1] ロルの定理

関数 $f(x)$ が閉空間 $[a, b]$ で連続で、開空間 (a, b) で微分可能であり、$f(a) = g(b)$ ならば

$$f'(c) = 0$$

であるような c が、(a, b) の中に少なくても 1 つ存在する。

[2.2] 平均値の定理

関数 $f(x)$ が閉空間 $[a, b]$ で連続で、開空間 (a, b) で微分可能ならば、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

であるような c が、区間 (a, b) の中に少なくとも 1 つ存在する。

[2.3]

関数 $f(x)$ が区間 D で微分可能であるとき、D の任意の 2 点 $a, a+h$ に対して

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$$

が成り立つような実数 $\theta(0 < \theta < 1)$ が存在する。

平均値の定理の応用

[2.4

] 関数 $f(x)$ が区間 D で微分可能であり、この区間で

(1) つねに $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ は D で増加である。

(2) つねに $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ は D で減少である。

(3) つねに $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x)$ は定数である。

[2.6] コーシーの平均値の定理

関数 $f(x), g(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で、区間 (a, b) で微分可能で、$f'(x) \neq 0$ ならば

$$\frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(c)}{f'(c)}$$

が成り立つような c が、区間 (a, b) の中に少なくとも 1 つ存在する。

2.2 不定形の極限値

[2.7] ロピタルの定理

$f(x), g(x)$ が区間 (a, b) で微分可能で、$f'(x) \neq 0$ であり、$x \to a$ の時、$f(x) \to 0, g(x) \to 0$ であるとする。その時、$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$ が存在すれば次の式が成り立つ。

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

また、この定理は $\pm\frac{\infty}{\infty}$ の形の不定形や、$x \to a$ の代わりに $x \to \infty$ の場合にも成り立つ。

また $\infty - \infty, \infty \times 0, \infty^0$ などの形も不定形という。このような時には、$\frac{0}{0}$ や $\frac{\infty}{\infty}$ の形に変形してロピタルの定理を適用できることがある。

参考文献

[1] 新編 高専の数学 2

制作:Roadagain, mito