微積分 I
-後期中間-

8　不定積分

8.1　不定積分

不貞不定積分 $\cdots$ 関数 $f(x)$ に対して, 導関数が $f(x)$ となるような関数のことです. つまり, $F'(x)=f(x)$ となるような関数 $F(x)$ ですね. また, $F(x)$　を　$f(x)$ の**原始関数**ということもあります.

なぜ"不定"なのか?$\cdots$ 例えば, $f(x)=1$ という関数を考えてみましょう. 微分して 1 になる関数 $F(x)$ は何があるでしょうか? もちろん, $F(x)=x$ がありますね. しかし, $F(x)=x+1$ や $F(x)=x-6$ など, 他にもいっぱいあるんです. そのため, "結果が 1 つに定まらない"という意味で, 不定積分というのです.

積分定数 $\cdots F'(x)=f(x)$ とすると, 定数 C に対して $\{F(x)+C\}'=f(x)$ が成り立ちますね (定数の微分は 0 のため). このとき, C を積分定数といいます.

積分記号 $\cdots \int$ のことです. インテグラルと呼ぶこともあります. $F(x)+C$ を記号

$$\int f(x)dx$$

で表します.

[8. 1] 不定積分の公式

$$\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1}+C \quad (p \text{ は実数}, p \neq -1)$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \log|x|+C$$
$$\int e^x dx = e^x + C$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

[8. 2] 和と定数倍の積分

$$\int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad (k \text{ は定数})$$

8.2　置換積分法

痴漢置換積分法 $\cdots$ 合成関数を積分する方法です.

[8. 3] 置換積分法

$t=\phi(x)$ とおくとき,
$$\int f(\phi(x))\frac{d\phi}{dx}=\int f(t)dt$$

上の式は, x に関する積分を t に関する積分に変えるということです. 例えば $\int(2x+1)^3dx$ は, $t=2x+1$ とおきます. 両辺の微分を取れば,
$$dt=2dx,\quad dx=\frac{1}{2}dt$$
です. それでは, $2x+1$ を t に, dx を $\frac{1}{2}dt$ に置換してみましょう.
$$\begin{aligned}\int(2x+1)^3dx&=\int t^3\cdot\frac{1}{2}dt\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}t^4+C\\&=\frac{1}{8}(2x+1)^4+C\end{aligned}$$
このように, 合成関数を簡単に積分することに成功しました.
抑えておくべきポイントは,

1. t で置き換える関数を見極める (カッコでくくられた中に関数があればほぼそれ)
2. その関数を微分し, dx と dt の関係式を導く

の 2 つです.
変数 x の 1 次式を t と置換する場合には, 次の公式がよく用いられます.

[8. 4]

$\int f(x)dx=F(x)+C$ であるとき,
$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\quad(a\neq 0)$$

8.3　部分積分法

積の微分の変形です.

[8. 5] 部分積分法

$$\boldsymbol{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'g(x)dx}$$

積の微分は

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

ですから,

$$f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)$$

が得られます. この両辺を積分すると, 上の公式が導かれます.

9　定積分

9.1　定積分

[9. 1]

関数 $f(x)$ が連続であり，$F(x)$ がその不定積分であるとき，値 $F(b) - F(a)$ を記号

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

で表し，$f(x)$ の a から b までの**定積分**という．

定積分は範囲を決める積分です．引き算で表されるため，積分定数 C が相殺されていらない子になります．また，定積分の定義の式を

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

と書き，$f(x)$ を $\boldsymbol{a}$ **から** $\boldsymbol{b}$ **まで積分する**といいます．

定積分は，不定積分と同様に，以下の公式も成立します．

[9.2]

関数の和・差および定数倍の定積分について，

$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \quad \text{(複合同順)}$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (k\ \text{は定数})$$

定積分を使うと，面積を求めることも出来ます．

[9.3]

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で，常に $f(x) \geq 0$ であるとき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸及び 2 直線 $x = a,\ y = b$ で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

[9.4]

$f(x)$ が区間 D で連続であるとき，その区間に含まれる任意の a, b, c について，次の式が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

9.2　置換積分法

置換積分は, 不定積分と同様です.

[9.5]

$\phi(x) = t, \phi(a) = \alpha, \phi(b) = \beta$ とすると,

$$\int_a^b f(\phi(x)) \frac{d\phi}{dx} = \int_\beta^\alpha f(t)dt$$

ちなみに, 区間 $[-a, a]$ での定積分では, 以下の公式が成り立ちます.

(1) 偶関数 $f(x)$ に対して $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_b^a f(x)dx$

(2) 奇関数 $f(x)$ に対して $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

9.3 部分積分法

これも不定積分と同様です.

[9.6]

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

また, sin と cos に関しては以下の公式が成り立ちます.

n が 2 以上の自然数の時, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$
定積分の結果は,

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n} \quad (n\text{ が偶数の時})$$
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n} \quad (n\text{ が奇数の時})$$

参考文献

[1] 新編 高専の数学 2

制作:Roadagain