微積分 I
-前期期末-

1　三角関数の導関数

三角関数の極限値を扱うとき, 次の性質はとても重要です.

[6.4]

角 θ を弧度法で表すとき

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

この性質から三角関数の導関数を導くと, 以下のようになります.

[6.5]

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\sin f(x))' = \cos x \cdot f'(x)$$
$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (\cos f(x))' = -\sin x \cdot f'(x)$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\tan f(x))' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot f'(x)$$

4　関数の増減

4.1　関数の増加・減少

実数 a, b とそれぞれの区間は, 右のように対応しています.
また, 上の 2 つをそれぞれ次の言葉で表すこともありますので, 余裕があれば覚えて下さい.

$[a, b]$: 閉区間
(a, b) : 開区間

不等号にイコールがついていれば [ ] を, ついていなければ ( ) を使います.
文字 D で表すこともあるから覚えておいてくださいね.
全区間 $\cdots$ 実数全体の集合のことです. $(-\infty, \infty)$ のことで, 文字 R で表すこともあります.

表 1　区間の表し方

不等号	記号
$a \leqq x \leqq b$	$[a, b]$
$a < x < b$	(a, b)
$a < x \leqq b$	$(a, b]$
$a \leqq x < b$	$[a, b)$

関数の増加・減少 $\cdots$ 関数 $f(x)$ の増減については以下の定理が成り立ちます.

[4.1]

関数 $f(x)$ について, 区間 D で

$$\text{常に } f'(x)>0 \Longrightarrow f(x) \text{ は区間 } D \text{ で増加}$$
$$\text{常に } f'(x)<0 \Longrightarrow f(x) \text{ は区間 } D \text{ で減少}$$

$f'(x)$ を計算して, 0 より大きければ増加, 少なければ減少です.

増減表 $\cdots$ 名前の通り, 関数の増加と減少を表した表です. $\nearrow$ は増加を, $\searrow$ は減少を表します.
右にあるのは $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ の増減表です.
$y' - 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ ですから, $x = 1, 3$ のとき $y' = 0$ になりますね.

表 2　増減表の例

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

ところで, 区間 D の関数 $f(x)$ が定数で表されていたとすると, $f'(x)$ は 0 になりますよね. 逆に考えると, 微分して 0 になるなら元の式は定数, ということになるんです. 定数ということは, D における $f(x)$ の値は一定ということになりませんか? なりますよね. むしろならない方がおかしいですよね. 異論は認めません.

[4.2]

区間 D で常に $f'(x) = 0$ なら, $f(x)$ はその区間 D で一定である.

4.2　関数の極大・極小

極大 $\cdots$ 関数 $f(x)$ にで, $x = a$ の近くで一番 $f(a)$ の値が大きいとき, $f(x)$ は $x = a$ で極大になる, といいます.

極大値 $\cdots f(x)$ が $x = a$ で極大になるときの $f(a)$ の値のことですね.

極小 $\cdots$ 極大とは逆に, $x = a$ の近くで一番 $f(a)$ の値が小さいとき, $f(x)$ は $x = a$ で極小になる, といいます.

極小値 $\cdots f(x)$ が $x = a$ で極小になるときの $f(a)$ の値です.

極値 $\cdots$ 極大値と極小値のことですね. 以上の説明は結構分かり辛いので, 次の定理を覚えた方がいいです.

[4.3]

関数 $f(x)$ について, x が増加するに連れて

(1)　$f'(x)$ の符号が $x = a$ の前後で正から負に変われば, $f(x)$ は $x = a$ で極大になる.

(2)　$f'(x)$ の符号が $x = a$ の前後で負から正に変われば, $f(x)$ は $x = a$ で極小になる.

関数 $f(x)$ が $x = a$ で極値を取れば, その前後で符号が変わる, ということですね. 前後で符号が変わるということは, $f'(a)$ はどうなるのでしょう?

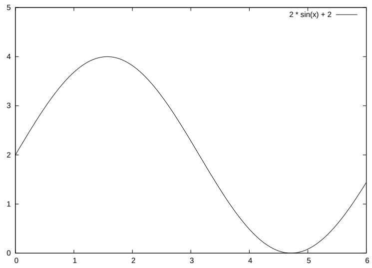
[4.4]

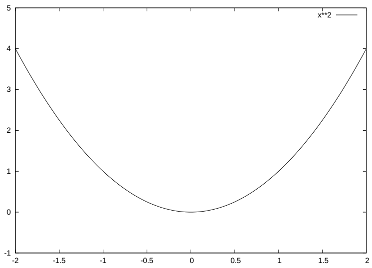
関数 $f(x)$ が $x = a$ で極値を撮る $\Longrightarrow f'(a) = 0$

ただし, この定理の逆は必ずしも成り立たないということに気をつけてください. 例えば, $y = x^3$ は $x = 0$ で $y' = 0$ になりますが, $y = 0$ は極値ではありません.

4.3 関数の最大値・最小値

関数の最大値・最小値 $\cdots$ 関数 $f(x)$ が区間 D で定義されている (関数の区間が限られている) とき, その中で一番大きい (あるいは小さい) 値のことですね. 右図のように, **区間が限られている**ということが重要です.
また, 関数が開区間で定義されていると最大値 (最小値) が定義されない場合があるので, 気をつけてください.





例えば, $y = x^2$ を $[-2, 2]$ で定義したとしましょう. 右下がその図です. そうすると, 最大値は 4, 最小値は 0 になりますね. では, $(-2, 2)$ で定義するとどうなるでしょうか? x は何をどうしても-2 や 2 にならないため, 最大値は 4 にはなりません. かといって, どこまでも-2 や 2 に近づけるので他の値を定義しようとしてもできないのです. だから, 最大値は**存在しない**ということになります.

8　不定積分

8.1　不定積分

~~不貞~~**不定積分** $\cdots$ 関数 $f(x)$ に対して，導関数が $f(x)$ となるような関数のことです．つまり，$F'(x)=f(x)$ となるような関数 $F(x)$ ですね．また，$F(x)$　を　$f(x)$ の**原始関数**ということもあります．

なぜ"不定"なのか?$\cdots$ 例えば，$f(x)=1$ という関数を考えてみましょう．微分して 1 になる関数 $F(x)$ は何があるでしょうか? もちろん，$F(x)=x$ がありますね．しかし，$F(x)=x+1$ や $F(x)=x-6$ など，他にもいっぱいあるんです．そのため，"結果が 1 つに定まらない"という意味で，不定積分というのです．

積分定数 $\cdots F'(x)=f(x)$ とすると，定数 C に対して $\{F(x)+C\}'=f(x)$ が成り立ちますね (定数の微分は 0 のため)．このとき，C を積分定数といいます．

積分記号 $\cdots \displaystyle\int$ のことです．インテグラルと呼ぶこともあります．$F(x)+C$ を記号

$$\int f(x)dx$$

で表します．

[8. 1] 不定積分の公式

$$\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1}+C \quad (p \text{ は実数}, p \neq -1)$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \log|x|+C$$
$$\int e^x dx = e^x + C$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{\tan x}+C$$

[8. 2] 和と定数倍の積分

$$\int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad (k \text{ は定数})$$

8.2　置換積分法

痴漢置換積分法 $\cdots$ 合成関数を積分する方法です.

[8. 3] 置換積分法

$t = \phi(x)$ とおくとき,

$$\int f(\phi(x))\frac{d\phi}{dx} = \int f(t)dt$$

上の式は, x に関する積分を t に関する積分に変えるということです. 例えば $\int (2x+1)^3 dx$ は, $t = 2x+1$ とおきます. 両辺の微分を取れば,

$$dt = 2dx, \quad dx = \frac{1}{2}dt$$

です. それでは, $2x+1$ を t に, dx を $\frac{1}{2}dt$ に置換してみましょう.

$$\begin{aligned}\int (2x+1)^3 dx &= \int t^3 \cdot \frac{1}{2}dt \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}t^4 + C \\ &= \frac{1}{8}(2x+1)^4 + C\end{aligned}$$

このように, 合成関数を簡単に積分することに成功しました.
抑えておくべきポイントは,

1. t で置き換える関数を見極める (カッコでくくられた中に関数があればほぼそれ)
2. その関数を微分し, dx と dt の関係式を導く

の 2 つです.
変数 x の 1 次式を t と置換する場合には, 次の公式がよく用いられます.

[8. 4]

$\int f(x)dx = F(x) + C$ であるとき,

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (a \neq 0)$$

8.3 部分積分法

積の微分の変形です.

[8. 5] 部分積分法

$$\int \boldsymbol{f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'g(x)dx}$$

積の微分は

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

ですから,

$$f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)$$

が得られます. この両辺を積分すると, 上の公式が導かれます.

9　定積分

9.1　定積分

[9. 1]

関数 $f(x)$ が連続であり, $F(x)$ がその不定積分であるとき, 値 $F(b)-F(a)$ を記号

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)}$$

で表し, $f(x)$ の a から b までの**定積分**という.

定積分は範囲を決める積分です. 引き算で表されるため, 積分定数 C が相殺されていらない子になります. また, 定積分の定義の式を

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

と書き, $f(x)$ を $\boldsymbol{a}$ **から** $\boldsymbol{b}$ **まで積分する**といいます.

定積分は, 不定積分と同様に, 以下の公式も成立します.

[9.2]

関数の和・差および定数倍の定積分について,

$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \quad (複合同順)$$
$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (k \text{ は定数})$$

定積分を使うと, 面積を求めることも出来ます.

[9.3]

関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続で, 常に $f(x) \geq 0$ であるとき, 曲線 $y=f(x)$ と x 軸及び 2 直線 $x=a,\ y=b$ で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

[9.4]

$f(x)$ が区間 D で連続であるとき, その区間に含まれる任意の a,b,c について, 次の式が成り立つ.

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

9.2　置換積分法

置換積分は, 不定積分と同様です.

[9.5]

$\phi(x) = t, \phi(a) = \alpha, \phi(b) = \beta$ とすると,

$$\int_a^b f(\phi(x))\frac{d\phi}{dx} = \int_\beta^\alpha f(t)dt$$

ちなみに, 区間 $[-a, a]$ での定積分では, 以下の公式が成り立ちます.

(3)　偶関数 $f(x)$ に対して　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_b^a f(x)dx$

(4)　奇関数 $f(x)$ に対して　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

9.3　部分積分法

これも不定積分と同様です.

[9.6]

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

また, sin と cos に関しては以下の公式が成り立ちます.

n が 2 以上の自然数の時, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$
定積分の結果は,

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-1}{n} \quad (n\text{ が偶数の時})$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-1}{n} \quad (n\text{ が奇数の時})$$

参考文献

[1] 新編 高専の数学 2

制作:Roadagain