微積分 I
-前期中間-

1 整式の導関数

1.1 関数の極限値

関数の収束 $\cdots$ 数列の収束を関数に当てはめたもの. $y = f(x)$ において, x の値を a に近づけるとき, その値が限りなく A に近付くなら, 記号を用いて

$$\lim_{n \to a} f(x) = A$$

または

$$f(x) \to A \quad (x \to a)$$

と表す. A を $x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限値**という.

数列と同じように, 関数の極限値も [2.1] のような法則が成立する.

~~本当は省略したいけど貼るよ．面倒だけど貼るよ．だから褒めろ！俺のこと褒めろ！~~

[2.1]

数列 a_n, b_n がともに収束するとき,

1. $\lim_{x \to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$ (複合同順)
2. $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$ (c は定数)
3. $\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$
4. $x \to a$ の近くで $g(x) \neq 0, \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ のとき

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

5. $x \to a$ の近くで常に $f(x) \leq g(x)$ ならば

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

1.2 微分係数・導関数

平均変化率 $\cdots$ 変化の割合.~~分からないなら中学校から出直して来い~~ちなみに計算式は,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

増分 $\cdots x$ と y がいくら増えたか. 上の式では,

$$\Delta x = b - a, \quad \Delta y = f(b) - f(a)$$

で表され, それぞれ x **の増分**, y **の増分**という. 記号の読み方は~~333~~ デルタである.~~音声認識で変身とかしません~~

微分係数 $\cdots$ 平均変化率を求める式で, 分母である Δx(x の増分) が限りなく 0 に近づいた時の Δy(y の増分). 式で表すと,

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

となる. また, 微分係数のことを**瞬間変化率**ともいう.

[3.2]

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (h = b - a \text{ とする})$$

導関数 $\cdots$ 微分係数 $f'(a)$ の a を x に置き換えただけ.

[3.3]

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

[3.4]

n が自然数の時は, $\quad (x^n)' = nx^{n-1}$

定数 c については, $\quad (c)' = 0$

1.3 導関数の計算

[3.5]

関数の和・差と定数倍の導関数について, 次の公式が成り立つ.

(1) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) + g'(x) \qquad$ (複合同順)

(2) $\{cf(x)\}' = cf'(x) \qquad$ (c は定数)

1.4 接戦と速度

接線 $\cdots$ 曲線と接する直線. 接する点を**接点**という.

[3.6]

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線の方程式は,

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

4　関数の増減

4.1　関数の増加・減少

実数 a, b とそれぞれの区間は, 右のように対応しています. また, 上の 2 つをそれぞれ次の言葉で表すこともありますので, 余裕があれば覚えて下さい.

$[a, b]$: 閉区間
(a, b) : 開区間

不等号にイコールがついていれば [ ] を, ついていなければ ( ) を使います.
文字 D で表すこともあるから覚えておいてくださいね.
全区間 $\cdots$ 実数全体の集合のことです. $(-\infty, \infty)$ のことで, 文字 R で表すこともあります.

表 1　区間の表し方

不等号	記号
$a \leqq x \leqq b$	$[a, b]$
$a < x < b$	(a, b)
$a < x \leqq b$	$(a, b]$
$a \leqq x < b$	$[a, b)$

関数の増加・減少 $\cdots$ 関数 $f(x)$ の増減については以下の定理が成り立ちます.

[4.1]

関数 $f(x)$ について, 区間 D で

常に $f'(x)>0 \Longrightarrow f(x)$ は区間 D で増加
常に $f'(x)<0 \Longrightarrow f(x)$ は区間 D で減少

$f'(x)$ を計算して, 0 より大きければ増加, 少なければ減少です.

増減表 $\cdots$ 名前の通り, 関数の増加と減少を表した表です. $\nearrow$ は増加を, $\searrow$ は減少を表します.
右にあるのは $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ の増減表です.
$y' - 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ ですから, $x = 1, 3$ のとき $y' = 0$ になりますね.

表 2　増減表の例

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

ところで, 区間 D の関数 $f(x)$ が定数で表されていたとすると, $f'(x)$ は 0 になりますよね. 逆に考えると, 微分して 0 になるなら元の式は定数, ということになるんです. 定数ということは, D における $f(x)$ の値は一定ということになりませんか? なりますよね. むしろならない方がおかしいですよね. 異論は認めません.

[4.2]

区間 D で常に $f'(x) = 0$ なら, $f(x)$ はその区間 D で一定である.

4.2 関数の極大・極小

極大 $\cdots$ 関数 $f(x)$ にで, $x=a$ の近くで一番 $f(a)$ の値が大きいとき, $f(x)$ は $x=a$ で極大になる, といいます.

極大値 $\cdots f(x)$ が $x=a$ で極大になるときの $f(a)$ の値のことですね.

極小 $\cdots$ 極大とは逆に, $x=a$ の近くで一番 $f(a)$ の値が小さいとき, $f(x)$ は $x=a$ で極小になる, といいます.

極小値 $\cdots f(x)$ が $x=a$ で極小になるときの $f(a)$ の値です.

極値 $\cdots$ 極大値と極小値のことですね. 以上の説明は結構分かり辛いので, 次の定理を覚えた方がいいです.

[4.3]

関数 $f(x)$ について, x が増加するに連れて

(3) $f'(x)$ の符号が $x=a$ の前後で正から負に変われば, $f(x)$ は $x=a$ で極大になる.

(4) $f'(x)$ の符号が $x=a$ の前後で負から正に変われば, $f(x)$ は $x=a$ で極小になる.

関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値を取れば, その前後で符号が変わる, ということですね. 前後で符号が変わるということは, $f'(a)$ はどうなるのでしょう?

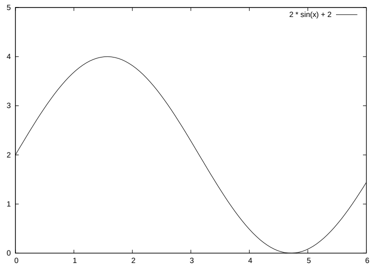
[4.4]

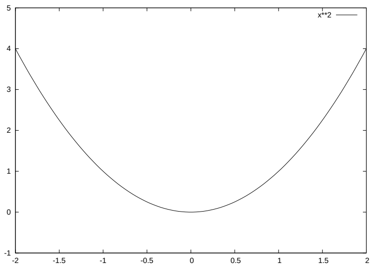
関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値を撮る $\Longrightarrow f'(a)=0$

ただし, この定理の逆は必ずしも成り立たないということに気をつけてください. 例えば, $y=x^3$ は $x=0$ で $y'=0$ になりますが, $y=0$ は極値ではありません.

4.3 関数の最大値 · 最小値

関数の最大値 · 最小値 $\cdots$ 関数 $f(x)$ が区間 D で定義されている (関数の区間が限られている) とき, その中で一番大きい (あるいは小さい) 値のことですね. 右図のように, **区間が限られている**ということが重要です.
また, 関数が開区間で定義されていると最大値 (最小値) が定義されない場合があるので, 気をつけてください.





例えば, $y = x^2$ を $[-2, 2]$ で定義したとしましょう. 右下がその図です. そうすると, 最大値は 4, 最小値は 0 になりますね. では, $(-2, 2)$ で定義するとどうなるでしょうか? x は何をどうしても-2 や 2 にならないため, 最大値は 4 にはなりません. かといって, どこまでも-2 や 2 に近づけるので他の値を定義しようとしてもできないのです. だから, 最大値は**存在しない**ということになります.

5　色々な関数の導関数

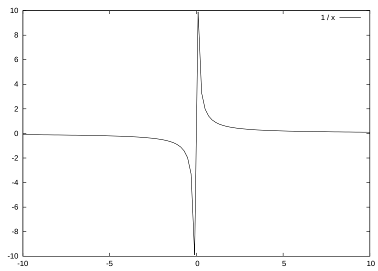
5.1　関数の極限

関数の極限 $\cdots$ 関数 $f(x)$ において, x を限りなく大きくしていくと, $f(x)$ の値が一定値 A に限りなく近付くとき, x が正の無限大になる時 $f(x)$ **は収束する**といいます. A を極限値といい, 記号を使って以下のように表します. 無限数列の収束の関数版だとでも思ってください.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

関数の発散 $\cdots$ 関数 $f(x)$ において, x をある値 a に限りなく近づけるとき, どんな近づき方に対しても関数 $f(x)$ の値が限りなく大きくなれば, 関数 $f(x)$ は発散します. ぶっちゃけた話, 収束しなければ全部発散 なんですね (実は振動も発散の一部です).

近づき方に注意した極限 $\cdots y = \dfrac{1}{x}$ は, x を 0 に近づけるとどうなるでしょう?右図を見て考えてみてください. 正の側から近づけると正の無限大に, 負の側から近づけると負の無限大にそれぞれ発散しますね. ~~グラフが繋がっていると考えるのはやめましょう.~~ だから, どちら側から近付くか というのも, 関数の極限値を考える上ではとても重要になってきます.



関数 $f(x)$ において, x が一定値 a に限りなく近付くとき,

- a より小さい方から a に近付くことを, $x \to a{-0}$
- a より大きい方から a に近付くことを, $x \to a{+0}$

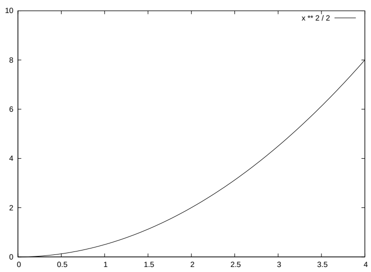
と表します. また,

- $x \to a - 0$ のとき $f(x) \to A$ ならば, A を左側極限値
- $x \to a + 0$ のとき $f(x) \to B$ ならば, B を右側極限値

といい, $\displaystyle\lim_{x \to a-0} f(x) = A$, $\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x) = B$ で表します.

5.2 関数の連続性

関数が連続 $\cdots$ 区間 D で, 関数 $f(x)$ が滑らかに繋がっている, ということです. 例えば $y = \dfrac{1}{2}x^2$ のグラフ (右図) は全区間で滑らかに繋がっていますね. これは全区間で連続といいます. しかし, $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフは, $x = 0$ では定義されていませんね. だからこれは $x \neq 0$ で連続, といいます. これを踏まえて, 次の定理を見てみましょう.



[5.1]

関数 $f(x), g(x)$ が $x = a$ で連続ならば,

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

は $x = a$ で連続である. ただし, 章の場合は $g(a) \neq 0$ とする.

$x = a$ で連続というのは, $x = a$ のときに $f(x)$ と $g(x)$ が値を取る, ということです. 例えば, $y = \tan x$ だと, $x = \dfrac{\pi}{4}$ で連続ではありません. $\tan\dfrac{\pi}{4}$ は定義されていませんからね.

さて, $y = f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続なら, グラフは滑らか一な曲線になっていますよね. だから, 次の定理が成り立ちます.

[5.2] 中間値の定理

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で, $f(a) \neq f(b)$ であるとする. このとき, $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して,

$$f(c) = k$$

であるような c が開区間 (a, b) の中に少なくとも 1 つ存在する.

滑らかに繋がっているので, 2 つの間の値も必ずその区間内にあるはずです. $f(x) = 2x$ で, $a = -3, b = 5$ としてみましょう. このとき, $f(a) = -6, f(b) = 10$ ですね. では, 2 つの間の値 0 に対して, $f(c) = k$ となる c はなんでしょう? もちろん $c = 0$ ですが, これは $a < c < b$ になっているますよね. これが中間値の定理です.

微分可能 $\cdots$ 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続なら, 微分係数 $f'(a)$ が求められますよね. これを, $f(x)$ は $x = a$ で微分可能, といいます. また, 区間 D の各点で微分可能なら, $f(x)$ は区間 D で微分可能, といいます.

さて, 関数 $f(x)$ が $x = a$ や区間 D で微分可能であるには, $x = a$ や区間 D で連続である必要があります. そのため, 次の定理が成り立ちます.

[5.3]

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば, $f(x)$ は $x = a$ で連続である. 区間 D で微分可能ならば, $f(x)$ は区間 D で連続である.

5.3　積と商の導関数

積と商の導関数は, 面倒な計算をするより公式を覚えるのが一番手っ取り早いです.

[5.4]

関数 $f(x), g(x)$ が微分可能ならば,

(1)
$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(2)
$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

5.4　合成関数とその導関数

合体合成関数 $\cdots y = f(t)$ が t の関数, $t = g(x)$ が x の関数であるとき, $t = g(x)$ を $y = f(t)$ に代入して得られる関数 $f(g(x))$ のことです. 例えば, $y = \sqrt{x^2 - 1}$ は $y = \sqrt{t}$ と $t = x^2 - 1$ の合成関数です.

合成関数の導関数は以下の式で求められます.

[5.5]

関数 $y = f(t), t = g(x)$ が微分可能であるとき, 合成関数 $y = f(g(x))$ の x についての導関数は,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = f'(t)g'(x)$$

6　対数関数・指数関数・三角関数の導関数

6.1　対数関数・指数関数の導関数

e···~~電子~~ネイピア数とも呼ばれ, 指数関数 $y = a^x$ において, $x = 1$ のときの微分係数 $f'(1)$ が 1 となるような a の値です. おおよそ 2.71828182846 です.

自然対数 $\cdots e$ を底とした対数のことです. 普通は底を省略して $\log_e x$ を $\log x$ と書いたり, 常用対数と区別するために $\ln x$ と書いたりします. このまとめでは自然対数を $\log x$ と書きます.

以下の定理において, 青字で書いてあるものは合成関数の微分法により成り立つ公式です. 教科書には載っていませんが, よく使うのでぜひ覚えてください.

[6.1]

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \qquad \{\log f(x)\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

[6.2]

$$(e^x)' = e^x \qquad \{e^{f(x)}\}' = e^x f'(x)$$

対数微分法 $\cdots$ 両辺の自然対数をとって, もとの関数の導関数を求める方法です. 例として $(x^p)' = px^{p-1}$ の証明を考えましょう.

$y = x^p$ とおき, 両辺の自然対数をとれば,

$$\log y = p \log x$$

であるから,

$$\frac{y'}{y} = \frac{p}{x} \qquad \therefore y' = \frac{px^p}{x} = px^{p-1}$$

6.2　三角関数の導関数

三角関数の極限値を扱うとき, 次の性質はとても重要です.

[6.4]

角 θ を弧度法で表すとき

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

参考文献

[1] 新編 高専の数学 2

制作:Roadagain