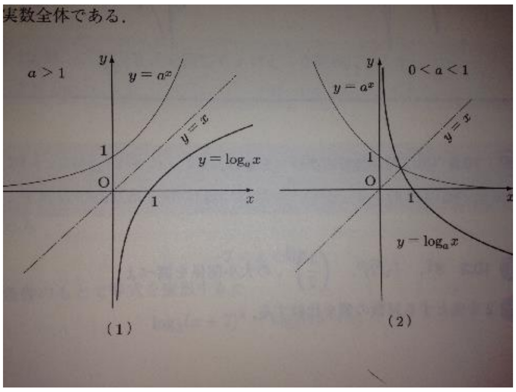
基礎数学 I

逆関数

逆関数……関数$y=f(x)$において、値域の値全てに対して$f(x)=y$となるxがただ 1 つに定まる場合、$x=f^{-1}(y)$と書く。これを変数をx,関数をyで書き直した、$y=f^{-1}(x)$(**f^{-1}を=fの-1 乗と勘違いしてはいけない**)の形になる関数。例えば、$y=2^x$の逆関数は$y=\log_2 x$である。また、関数とその逆関数では定義域と値域が入れ替わる。



逆関数の導き方 I
①関数$y=f(x)$の式をxについて解く($x=$○○(○○は式)の形にする)
②xについて解いた式のxとyを入れ替える
関数$y=f(x)$とその逆関数$y=f^{-1}(x)$のグラフは、直線$y=x$に関して対称
例：関数$y=2^x$と$y=\log_2 x$(左図)

逆関数の導き方 II
①関数$y=f(x)$を直線$y=x$に関して対称移動させた像の方程式を求める
②その式をyについて解く

個数の処理

場合の数……あることがらについて、起こりうる全ての場合の個数。例えば、コイントスだと裏と表の 2 つ。

和の法則
2 つのことがら A,B が同時に起こることはなく、A の起こる場合がm通り、B の起こる場合がn通りであるとき、A または B の起こる場合の数は全部で$m+n$通りである。
例：サイコロを振り、5 以上が出る場合は 2 通り、3 以下が出る場合は 3 通りある。5 以上か 3 以下の目が出る場合の数は全部で$2+3=5$通り。

積の法則
2 つのことがら A,B について、A の起こる場合がm通りであり、その各々の場合に対して B の起こる場合がn通りであるとき、A と B 共に起こる場合の数は$m\times n$通りである。
例：2 回サイコロを振るとき、3 以下の目が出る場合は 3 通り、2 以上の目が出る場合は 4 通り。このとき、1 回目で 3 以下が出て、2 回めで 2 以上の目が出るのは全部で$3\times 4=12$通り。

順列……異なるn個のものから異なるr個を取り出して一列に並べたもの。その総数を記号 $_{n}P_{r}$で表す。
異なるn個のものからr個を取り出す順列の総数は

$$_{n}P_{r}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

例えば、$_{10}P_{3}=10\cdot 9\cdot 8=720$通り
階乗……1 からnまでの自然数の積。記号$n!$で表す。異なるn個のもと全部を 1 列に並べる順列の総数は$n!$であり、$n<r$のとき、$_{n}P_{r}=\frac{n!}{(n-r)!}$と表せる。また、また、$0!=1$と定義する。

円順列……幾つかの物を円形に並べたもの。総数は$(n-1)!$
重複順列……異なるn個のものから同じ物を繰り返し取ることを許して、r個を取って並べる順列。総数はn^r

組み合わせ……異なるn個のものから異なるr個を取り出し、順序を考えないで一組としたもの。その総数を記号$\boldsymbol{{}_nC_r}$または$\binom{n}{r}$で表す。一般に、${}_nC_r \leq {}_nP_r$である(${}_nC_r = {}_nP_r$になるのは$n=1$か$n=0$のときだけ)。
異なるn個のものから異なるr個を取り出す組み合わせの総数は

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 1} $$

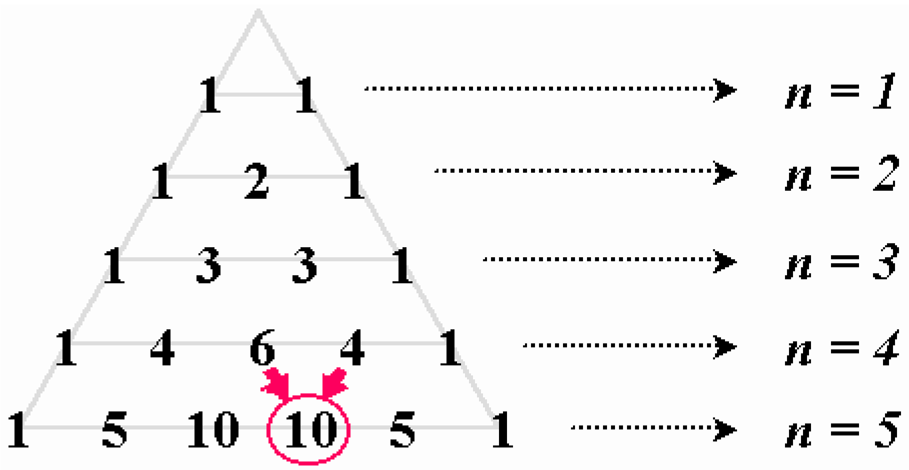
例えば、${}_{10}C_3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{720}{6} = 120$通り

組み合わせに関する公式

${}_nC_1 = n$　　${}_nC_n = 1$　　${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$のため、${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$　　また、$\boldsymbol{{}_nC_0 = 1}$と定義する。

${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$　　${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$　$(1 \leq r \leq n-1)$

二項定理……2 数の和の累乗を求めるとき、各項の係数を求めるための定理。これを使えば、理論上は何乗の式も求められる。
$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots {}_nC_{n-1}ab^{n-1} + {}_nC_nb^n$
二項係数……二項定理における${}_nC_r$の値。各項の係数になっているのが名前の由来。
パスカルの三角形……二項係数を下図のように並べたもの。



左右対称で、隣り合う 2 つの数の和が下段の数になっている(他にも、特定の数の集合が多く見つかっている)。

数列

数列……順番に並べられた数の列。以下の様なものはすべて数列である。
(1) 奇数を 1 から順に並べたもの　1, 3, 5, 7, 9, …
(2) 3 から初めて、次々に 2 をかけて得られる数　　3, 6, 12, 24, 48, …
一般には、第n番目の数をa_nで表し、数列を

$$ a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots $$

と表す。これをまとめて、簡単に$\{a_n\}$と書くこともある。

項……数列の 1 つ 1 つの数。最初から順に第 1 項, 第 2 項, …, 第n項といい、特に第 1 項は**初項**ともいう。
一般項……数列の第n項をnで表した式。例えば、上の(2)の一般項は

$$ a_n = 3\cdot 2^{n-1} $$

となる。

有限数列……数列の項の数が有限な数列。

項数……有限数列の項の数。

末項……最後の項。

等差数列……ある数aに一定の数dを次々に加えられて得られる数列。

公差……一定の数d

例えば、2, 5, 8, 11, 14, …

という数列は、2 に 3 を次々に加えて得られる。この場合、公差は 3 となる。第n項は、aにdを$(n-1)$回加えて得られるから、

初項がa, 公差がdの等差数列の一般項a_n　　$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$　　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

初項a, 公差dの等差数列の第n項までの和S_n

(1)　　$\boldsymbol{S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}}$

第n項をlとすると、$l = a + (n-1)d$のため、

(2)　　$\boldsymbol{S_n = \frac{n(a+l)}{2}}$

~~頭皮~~等比数列……ある数aから始めて、0 でない一定数rを次々に掛けて得られる数列。

公比……一定数r

例えば、3, 6, 12, 24, 48, …

という数列は、3 に 2 を次々に掛けて得られる。この場合、公比は 2 となる。第n項は、aにrを$(n-1)$回掛けて得られるから、

初項がa, 公比がrの等比数列の一般項a_n　　$\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$　　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

初項がa, 公比がrの等比数列の第n項までの和S_n

$r \neq 1$のとき　　$\boldsymbol{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}}$

$r = 1$のとき　　$\boldsymbol{S_n = na}$

自然数の 1~3 乗の和

1 乗　　$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2 乗　　$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3 乗　　$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$　　(1 乗の総和の式を 2 乗した値)

Σ……総和の記号。シグマと読む。~~志態理科~~

使い方は以下の通り。

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Σの下にあるのがkの最初の値(この場合は 1)

Σの上にあるのがkの最大値(この場合はn)

Σの右にあるのが足す値(この場合はk^2)
つまり、上の式は1からnまでの2乗の総和を表している。

Σを使った和の計算の公式

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k \quad (\text{複合同順})$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k \quad (c\text{は定数})$$

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc$$

帰納的定義……数列$\{a_n\}$の定め方。

1. 初項a_1,
2. 第n項a_nから次項a_{n+1}を定める式(**漸化式**)

この2つを与える。

例えば、$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$という初項と漸化式が与えられれば、
$a_2 = 1 + 3 = 4,\quad a_3 = 4 + 3 = 7,\quad a_4 = 7 + 3 = 10,\ a_5 = 10 + 3 = 13,\ \cdots$という風に数列の各項を順に求めることができる。

数学的帰納法……証明方法の1つ。自然数nに関する命題は、

1. $n = 1$のときにその命題が成り立つ
2. ある自然数kについて、$n = k$のときその命題が成り立つと仮定すると仮定すれば、$n = k + 1$のときにもその命題が成り立つ

この2つが証明されれば、全ての自然数nについて成り立つ。