基礎数学Ⅰ

$\begin{cases} \boldsymbol{p \Rightarrow q}\textbf{と}\mathbf{P \subset Q} \\ \boldsymbol{\overline{q} \Rightarrow \overline{p}}\textbf{と}\boldsymbol{\overline{Q} \subset \overline{P}} \end{cases}$は同値

命題とその**対偶**の**真偽は一致**する(命題が真なら対偶も真、命題が偽なら対偶も偽)

背理法……「$p \Rightarrow q$」を証明するとき、「pであると仮定した時、qが成り立たないと仮定すると矛盾が起こる」ことを証明する方法。

背理法の一例：素数が無限にあることの証明

もし素数に限りがあるとして、最大の素数をPとする。このとき、Pまでの全ての素数を掛け、それに 1 を足した数をxとすると、これはPより大きな素数である。つまり、「素数に限りがある」という仮定が間違っている。よって、素数に限りはない。■

方程式……$x^2+2x+1=0$のように、特定の解を代入した時のみ成立する等式。

恒等式……$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$のように、文字にどのような数を入れても成立する等式。

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}\text{が}\boldsymbol{x}\text{についての恒等式}\Leftrightarrow \boldsymbol{a=b=c=0}$$

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c \Leftrightarrow a=a', b=b', c=c'}$$

整式……単項式及び多項式のこと。

剰余の定理……整式$P(x)$を 1 次式$x-\alpha$で割った余りをRとすると、$P(\alpha)=R$

因数定理……整式$P(x)$が 1 次式$x-\alpha$で割り切れる$(R=0)\Leftrightarrow$ $\mathrm{P(\alpha)=0}$

3 次方程式……$ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$の方程式

$\boldsymbol{n}$次方程式……n次式$=0$の方程式。**重解も含め**、n個の解を持つ。

高次方程式……3 次以上の方程式

高次方程式は、因数定理を用いて方程式を 1 次式または 2 次式の積に因数分解して解く

高次不等式……3 次以上の不等式。因数定理により 2 次以下の式の積に因数分解し、各因数の符号を調べて解く。表にまとめると分かりやすい。

例 1：$x^3-2x^2-5x+6<0$の場合

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$とおく。ここで、$P(1)=0$となるから、

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x^2-x-6) \\ &= (x-1)(x-3)(x+2) \end{aligned}$$

のように因数分解できる。

この因数の符号は、xの値によって右の表のようになる。式$P(x)$の符号を調べて、解は$x<-2,\ 1<x<3$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

例 2：$x^3-2x^2+4x+7>0$の場合

左辺に$x=-1$を代入すると 0 になるから因数分解すると

$$(x+1)(x^2-3x+7)>0$$

$x^2-3x+7=0$の判別式は、$D=3^2-4\times 7=-19<0$で、x^2の係数が正であるから、x^2-3x+7は常に正である。解は$x+1>0$であるxの範囲$x>-1$

恒等式の証明

①一方の式を変形して他方の式を導く

②2 つの式の差が 0 になること(左辺－右辺=0)を示す

①の例：$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$の証明

左辺 $=a^2c^2+2acbd+b^2d^2+a^2d^2-2adbc+b^2c^2$

$=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2$

$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

②の例：$a+b+c=0$のとき、$a^3+b^3+c^3=3abc$の証明

$a+\ b+c=0$から、$c=(-a+b)$である。

左辺 $-$ 右辺 $=a^3+b^3+\mathrm{c}^3-3\mathrm{abc}$

$=a^3+b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)$

$=a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3+3(a^2b+ab^2)$

$=0$

比例式……比が入った式。例：$a{:}b=c{:}d$

次の比例式と分数式の等式は同値

$$a{:}b=c{:}d\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{c}{a}=\frac{b}{d}$$

$$a{:}b{:}c=a'{:}b'{:}c'\Leftrightarrow\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

相加平均……n個の数において、$\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{\mathrm{n}}$のこと。2 個の数$a,b$においては、$\frac{a+b}{2}$のこと。

相乗平均……n個の数において、$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$のこと。2 個の数$a,b$においては、$\sqrt{ab}$のこと。

一般に、相加平均≧相乗平均で、等号が成立するのは$a=b$のときのみ

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{\mathrm{ab}}$の証明

左辺 $-$ 右辺

$=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$

$=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})\geq0$　　等号が成立するのは成立するのは$\sqrt{a}=\sqrt{b}$つまり$a=b$のとき

関数……xに関する式において、xに値を代入するとyの値がただ一つに定まるもの。

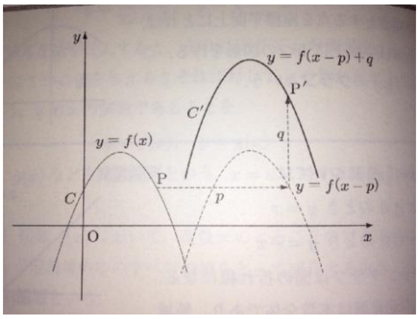
関数記号……$f(x)$や$g(x)$のこと。xにaを代入した時の$f(x)$の値を$f(a)$と表す。

定義域……関数$f(x)$において、変数xの取れる値の集合

値域……関数$f(x)$の値全体の集合

移動・変換……(平面上の)点や図形を同じ平面上のどこかに移すこと。

像……移動によって移ったあとの点や図形



座標平面上でx軸方向にp, y軸方向にq移動する平行移動は、$x'=x+p$, $y'=y+q$で表される。これは任意の点$P(x,y)$を$P'(x',y')$に移す。

$y=f(x)$のグラフをx軸方向にp, y軸方向にq並行移動

$y=f(x)$上の点$P(x,y)$を平行移動した点を$P'(x',y')$とする。

曲線$y=f(x)$をx軸方向にp, y軸方向にq並行移動した像C'の方程式 $y=f(x-p)+q$

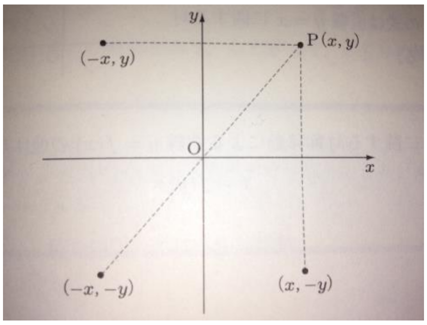
対称移動

対象移動による点$P(x,y)$の像を$P'(x',y')$とするとき、

x軸に関する対称移動は $x'=x,\ \ y'=-y$

y軸に関する対称移動は $x'=-x, y'=y$

原点に関する対称移動は$x'=-x, y'=-y$



曲線$C: y=f(x)$の対称移動による像C'の方程式

x軸に関する対称移動　　$\boldsymbol{y=-f(x)}$

y軸に関する対称移動　　$\boldsymbol{y=f(-x)}$

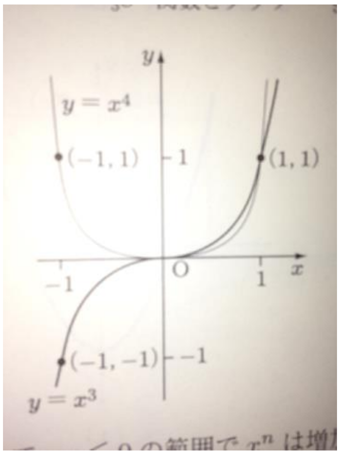
原点に関する対称移動　　$\boldsymbol{y=-f(-x)}$

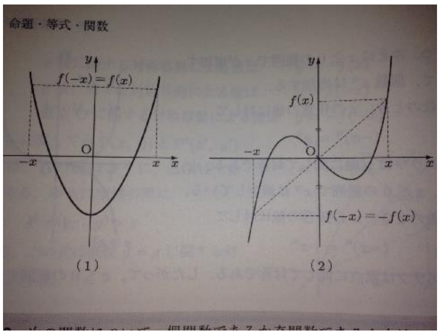
直線$y=x$に関する対称移動　$\boldsymbol{x=f(y)}$

冪関数…$y=x^n$(nは自然数)の形で表される関数(左の関数はn次の冪関数)。nが偶数ならy軸に、奇数なら原点に関して対称である。

偶関数……$f(-x)=f(x)$が成り立つ関数。**y軸に関して対称**である。

奇関数……$f(-x)=-f(x)$が成り立つ関数。**原点に関して対称**である。





分数関数……$y=\frac{2}{x}$, $y=\frac{3}{x-1}$, $y=\frac{x+1}{x^2+1}$のように、変数xの分数式で表される関数。定義域は分母≠0 となるようなx全体

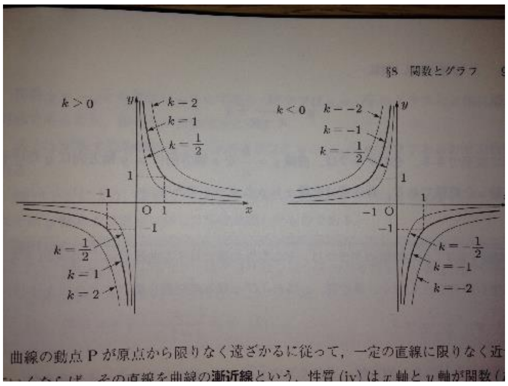
分数関数$y=\frac{k}{x}$とそのグラフについて

①定義域は$x\neq 0$, $k>0$なら第 1、第 3 象限、$k<0$なら第 2、第 4 象限にグラフがある

②原点 O に関して対称

③直線$y=x$に関して対称

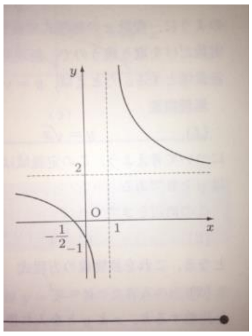
④漸近線はx軸とy軸



漸近線……曲線上の点 P が一定の値に近づく、または一定の点から遠ざかるにつれて限りなく近づいていく直線。例えば、$y=\tan\theta$(正接関数)の漸近線は$x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$(nは整数)。

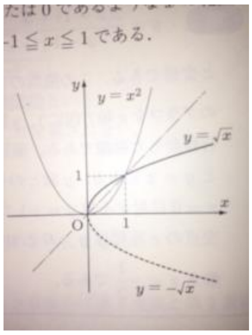
分子・分母が共に 1 次式である分数関数の基本的な形　$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$

上の式は$y=\frac{k}{x-p}+q$の形に変形できる。そのグラフは、$y=\frac{k}{x}$のグラフをx軸方向にp, y軸方向にq平行移動した曲線になる。また、漸近線は直線$x=p$と$y=q$である。



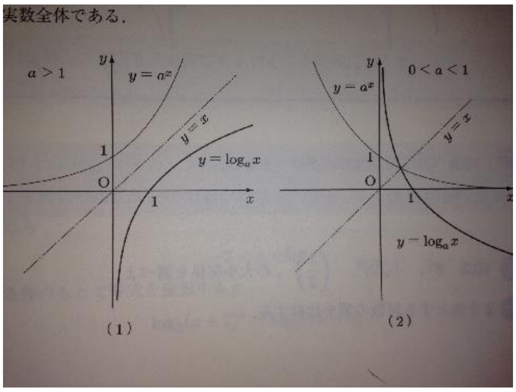
無理関数……$y=\sqrt{2x}, y=\sqrt{1-x^2}$ のように、変数xの無理式で表される関数。定義域は根号の中が正または 0 であるようなxの値全体。

無理方程式……$\sqrt{x+5}=x-1$のように、未知数についての無理式(この場合は$\sqrt{x+5}$)を含む方程式。2 乗した式を因数分解して解くのが基本だが、もとの方程式の解ではないものが出てくる可能性がある。これは、2 乗した式を因数分解すると、根号の中が負の場合のxの



値も出てきてしまうためである。そのため、
①適当に移項し、両辺を 2 乗するなどして、根号を含まない方程式に直す
②導かれた方程式を解く
③その解のうち、元の無理方程式が成立するものだけを解とする。

逆関数……関数y $= f(x)$において、値域の値全てに対して$f(x) = y$となるxがただ 1 つに定まる場合、$x = f^{-1}(y)$と書く。これを変数をx, 関数をyで書き直した、$y = f^{-1}(x)$(**f^{-1}を=fの-1 乗と勘違いしてはいけない**)の形になる関数。例えば、$y = 2^x$の逆関数は$y = \log_2 x$である。また、関数とその逆関数では定義域と値域が入れ替わる。



逆関数の導き方 I
①関数$y = f(x)$の式をxについて解く(x =○○(○○は式)の形にする)
②xについて解いた式のxとyを入れ替える
関数$y = f(x)$とその逆関数$y = f^{-1}(x)$のグラフは、直線$y = x$に関して対称
例：関数$y = 2^x$と$y = \log_2 x$
逆関数の導き方 II
①関数$y = f(x)$を直線$y = x$に関して対称移動させた像の方程式を求める
②その式をyについて解く