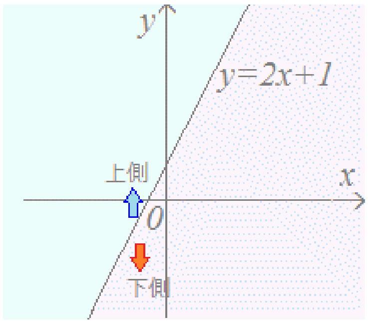
基礎数学Ⅱ

不等式と領域



座標平面上で、$y=2x+1$の表す直線をlとする。そのとき、$y>2x+1$を満たす点の集合は、lの上側全体になる。

例えば、点(-1, 2)だと、$2>2\times(-1)+1=1$となり、$y>2x+1$が成り立つ。

また、$y<2x+1$を満たす点の集合は、直線lの下側全体である。

例えば、点(5, 3)だと、$3<2\times 5+1=7$となり、$y<2x+1$が成り立つ。

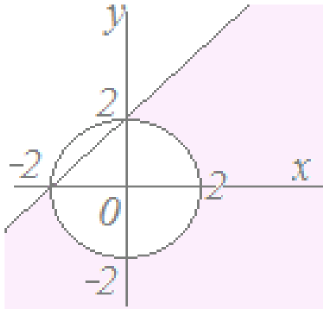
方程式$y=ax+b$の直線をlとするとき、

(1)　1 次不等式$y>ax+b$の表す領域はlの上側全体である。

(2)　1 次不等式$y<ax+b$の表す領域はlの下側全体である。

上記のようなとき、直線lを領域の**境界**という。上の定理の示す不等式は境界を含まない(境界は破線で描く)。

一方、$y\geq 2x+1$のように、等号もつく不等式の領域は、境界を含む(境界は実線で描く)。



連立不等式の表す領域は、各々の不等式を同時に満たす点$P(x,y)$の全体の集合であるから、各々の不等式が表す領域の共通部分である。

例：$\begin{cases} x^2+y^2>4 \\ y\leq x+2 \end{cases}$の表す領域(右図)

$x^2+y^2>4$の表す領域は、円の外側(領域を含まない)

$y\leq x+2$の表す領域は、$y=x+2$の下側全体

座標平面上の境界も含む多角形の領域において、一次式$ax+by+c$はある頂点で最大になり、またある頂点で最小になる(1 つの辺上で最大値または最小値を取ることもある)

⇒つまり各頂点でその一次式の値を求め、そのうちの最大、最小を取ればよい(めちゃんこ楽)

ベクトルと図形(長過ぎ＋分からなさ過ぎ注意)

スカラー……長さや質量、温度など、向きを持たず、1 つの実数で表せる量。

有向線分……線分 AB において、A から B に向きをつけたもの。A を**始点**、B を**終点**という。

ベクトル……位置を考えず、向きと大きさだけを考えた有向線分。力や速度など、大きさに加えてその向きも考えなければいけない量。有向線分 AB で表されるベクトルを、$\overrightarrow{AB}$と書く。有向線分 AB と PQ の<u>向きと大きさが等しい</u>とき、ベクトルとして等しい。(大きさだけ、向きだけではベクトル的に等しくない)

ベクトルを一文字で表すときは、$\boldsymbol{a}$や$\boldsymbol{b}$のように太文字で表す($\vec{a}$や$\vec{b}$のように矢印をつけて表す方法もある)。

零ベクトル……点 P において、PP を始点と終点が一致した特別なベクトルとみなしたもの。$\boldsymbol{0}$で示す。

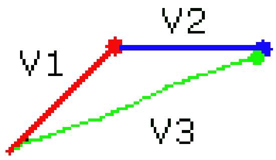
ベクトルの大きさ……ベクトル$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$において、AB の長さ。絶対値記号を使い、$|\boldsymbol{a}|$と表す。任意のベクトル$\boldsymbol{a}$に対して、$|\boldsymbol{a}| \geq 0$である($|\boldsymbol{a}| \geq 0$になるのは$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$のときだけ)。

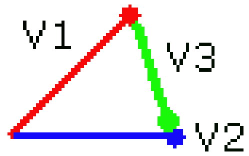
単位ベクトル……大きさが 1 のベクトル。$\boldsymbol{e}$で表すことが多い。

ベクトルの演算(終点が●)

加算(左)……$\overrightarrow{V1} + \overrightarrow{V2} = \overrightarrow{V3}$

減算(右)……$\overrightarrow{V2} - \overrightarrow{V1} = \overrightarrow{V3}$





逆ベクトル……ベクトル$\boldsymbol{a}$における$-\boldsymbol{a}$のこと。大きさが同じで、向きが逆のベクトル。

加法の基本法則

1. 交換法則　$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
2. 結合法則　$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$
3. 零ベクトルの性質　$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
4. 逆ベクトルの性質　$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0},\ (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

ベクトル$\boldsymbol{a}$と実数kに対して、次のベクトルを**ベクトル$\boldsymbol{a}$と実数kとの積**または単に$\boldsymbol{a}$のk倍といい、$k\boldsymbol{a}$で表す。

- $k > 0$のときは、$\boldsymbol{a}$と同じ向きで大きさが$|\boldsymbol{a}|$のk倍のベクトル
- $k < 0$のときは、$\boldsymbol{a}$と逆の向きで大きさが$|\boldsymbol{a}|$のk倍のベクトル
- $k = 0$のときは、零ベクトル$\boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{0}$でないベクトル$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$と$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{CD}$について、直線 AB と CD が並行であるとき、$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$は互いに**並行である**といい、$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$で表す。このとき、$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$はお互いの実数倍で表される(並行でない場合、向きが違うため実数倍しても同じにならない)。~~ちなみに、一方通報は地面と平行に飛べる。~~

$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$のとき、

$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$または$\boldsymbol{b} = l\boldsymbol{a}$の形に表される

ベクトルと実数の積の基本法則

1. 結合法則　$(kl)\boldsymbol{a} = k(l\boldsymbol{a})$
2. 分配法則　$(k + l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}$
3. 分配法則　$k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$
4. $0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0},\ k\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$
5. $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a},\ (-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$

位置ベクトル……原点 O からどこかの点(今回は P とする)へのベクトル。$\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{p}$の場合、$\boldsymbol{p}$が位置ベクトル

1 次結合……ベクトル版 1 次式。

平面上で$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$が$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$(両方共零ベクトルでない)で、$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$が平行でない時、平面上の任意のベクトル$\boldsymbol{c}$は、$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$の 1 次結合 $\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$ で表され、その表し方はただ一通り。

ベクトルの作る角……2 つの零ベクトルではないベクトルがあるとき、その 2 つの始点を揃えると、角θができる。それ。ちなみに、$0° \leq \theta \leq 180°$である。

内積……スカラー積とも(スカラーなので一方通行の出番はない)。ベクトル$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$に対し、$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$で与えられる値。$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$と書く。$\boldsymbol{a}$または$\boldsymbol{b}$が零ベクトルのときは、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$と定義する。必ず$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$と書かなければならず、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$と書いてはいけない。ベクトルの別の積である外積の書き方だからである。ちなみに、外積ではスカラーではなくベクトルが出て来る。詳しくは教科書 161 頁へ GO!

内積関係の公式・定理まとめ

1. 内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$

2. $\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$の作る角θの余弦 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

3. 角θと内積の関係
   $0°\leq\theta\leq 90° \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$
   $\theta=90° \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$
   $90°<\theta\leq 180° \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$

4. $\theta=90°$のときの内積 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ ←これメチャメチャ重要だから絶対に覚えろ

5. おおきさくらべ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leq|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ ($\cos\theta\leq 1$のため)

6. 平行四辺形の面積 $S=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ $S^2=|\boldsymbol{a}|^2|b|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$

ベクトルの成分……ベクトルの始点を原点 O としたとき、x軸方向にいくつ、y軸方向にいくつ進むかを表したもの。例えば、$\boldsymbol{a}=(2,3)$だと、x軸方向に 2, y軸方向に 3 進む。

ちなみに、点 A(2, 3)の位置ベクトルでもある。$\boldsymbol{p}=(x,y)$というベクトルがあれば、それは点$P(x,y)$の位置ベクトル。それだけ進めば点 P に辿り着けるってことだから当然っちゃ当然のこと。

x成分……$\boldsymbol{a}=(2,3)$における 2。x軸方向にいくつ進むかを表したもの

y成分……$\boldsymbol{a}=(2,3)$における 3。y軸方向にいくつ進むかを表したもの

x成分, y成分をまとめてベクトルの**成分**という。ここ重要。

$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$について、

1. 和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$
2. 実数kとの積 $k\boldsymbol{a}=(ka_1,\ ka_2)$
3. 並行 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow b_1=ka_1,b_2=ka_2\Leftrightarrow a_1:b_1=a_2:b_2$
4. ベクトルの表し方 $\boldsymbol{c}=(ka_1+lb_1,ka_2+lb_2)$
5. 内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2$
6. $\cos\theta$ $\cos\theta=a_1b_1+\frac{a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2b_2^2}}$
7. 直角 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2=0$ ←メチャ重要

直線とベクトル

説明がアレだから面倒なら公式(赤)だけ見るように

直線lが 2 点 A, B を通るとき、$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$とすると、$l$上の点 P の位置ベクトル$\boldsymbol{p}$は、$\boldsymbol{v}$の実数倍と$\boldsymbol{a}$の和で表せる。

(1) $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}=t\boldsymbol{v}$ $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}$ ←直線の**ベクトル方程式**(**$\boldsymbol{v}$を方向ベクトル**、**tを媒介変数**という。方向ベクトルは直線の傾きを示す)

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$とすれば、

$$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)=(x_2-x_1,y_2-y_1)$$

だから、式(1)は、

(2) $\begin{cases}x-x_1=tv_1\\y-y_1=tv_2\end{cases}$ すなわち $\begin{cases}x=x_1+tv_1\\y=y_1+tv_2\end{cases}$ または $\begin{cases}\boldsymbol{x-x_1=t(x_2-x_1)}\\\boldsymbol{y-y_1=t(y_2-y_1)}\end{cases}$ ←直線の**媒介変数方程式**

$v_1=x_2-x_1\neq 0$, $v_2=y_2-y_1\neq 0$のとき、式(2)をtについて解いて消去すると、

(3) $\frac{x-x_1}{v_1}=\frac{y-y_1}{v_2}$ または $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

が導かれる。式(3)は、点$A(x_1,x_2)$，点$B(x_2,y_2)$を通る直線の方程式である。

$$\boldsymbol{m}=\frac{v_2}{v_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

とすると、方程式(3)は、

(4) $y=m(x-x_1)+y_1$

となる。これは、点(x_1,y_1)を通り、傾きmの直線の方程式である。

法線ベクトル……直線lに垂直なベクトル。

$a=b=0$でないとき、直線

$$l: ax+by+c=0$$

に対してベクトル$\boldsymbol{n}=(a,b)$は、lに垂直である。

逆に、$\boldsymbol{n}=(a,b)\neq\boldsymbol{0}$が与えられた時、点$P_0(x_0,y_0)$を通り$\boldsymbol{n}$に垂直な直線は次の方程式で表される。

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p_0})=a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$ ←これメチャ重要

ちなみに、$c=-ax_0-by_0$である。

点$P_0(x_0,y_0)$から直線$ax+by+c=0$までの距離h

$$h=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

円のベクトル方程式……点 C を中心とし、半径rの円上の点を P とする。それぞれの点の位置ベクトルを$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{c}$とすると、$\overrightarrow{CP}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c}$だから、円は

$$|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c}|=r$$

と表される。←これのこと。

両辺を 2 乗すると、

$$|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c}|^2=r^2$$

である。こっちの方が使えるから~~咲~~先に覚えるように。

円といえば、…特にねえや。

点 P, C の座標を$P(x,y)$，$C(a,b)$とすると、この方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$