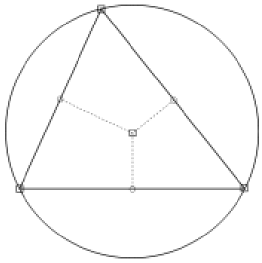
基礎数学Ⅱ

三角比から三角形の面積を求める公式　$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

外接円……三角形の３つの頂点全てを通る円。その中心を三角形の~~タトバ~~**外心**という。



★正弦定理　$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$　　Rは外接円の半径

★余弦定理

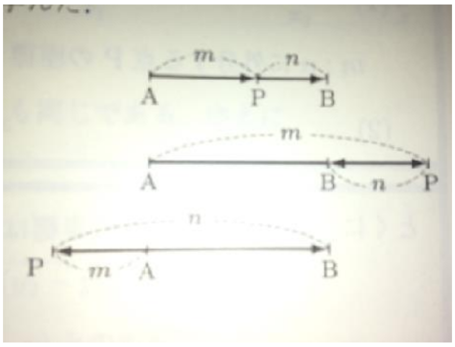
$$\left.\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C \end{aligned}\right\}$$

A, B, C がいかなる角であっても成り立つ。

点と直線

内分点……$m>0,\ n>0$のとき、線分 AB 上にあり、$AP:PB$を$m:n$にする点 P のこと。

外分点……$m>0,\ n>0$のとき、線分 AB の延長線上にあり、$AP:PB$を$m:n$にする点 P のこと。P は、$m>n$のとき B の延長上、$m<n$のとき A の延長上にある。



内分点の公式　$x=\frac{mb+na}{m+n}$

外分点の公式　$x=\frac{mb-na}{m-n}$

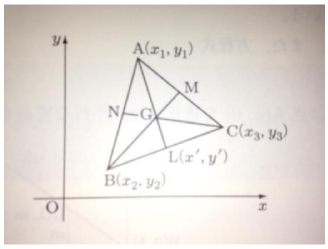
中点の公式　$x=\frac{a+b}{2}$

2 点$A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2)$を結ぶ線分 AB

$m:n$に内分する点$P(x,y)$の座標　$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ y=\frac{my_2+my_1}{m+n}$

$m:n$に外分する点$P(x,y)$の座標　$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ y=\frac{my_2-my_1}{m-n}$

中点　$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$



頂点が$A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),\ C(x_3,y_3)$である$\triangle ABC$の重心　$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

2 点$A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2)$の間の距離　$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

原点$O(0,0)$と点$P(x,y)$との距離　$OP=\sqrt{x^2+y^2}$

座標平面(グラフをかくやつ)上で、1 次方程式$y=mx+b$は、点$B(0,b)$を通り、傾きがmの直線を表す。bをこの直線の**y切片**または単に**切片**という。

直線の方程式……$ax+by+c=0$（aとbの少なくとも一方が 0 ではない）

x切片……方程式$ax+\mathrm{by}+\mathrm{c}=0$において、$y=0$のときの$x$の値

直線の方程式を求める公式①　$y-y_1=m(x-x_1)$

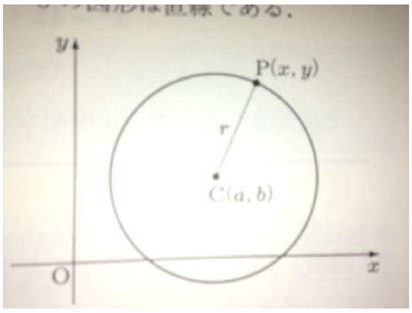
直線の傾きを求める公式　$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$　　$x_2=x_1$のとき、方程式は$x=x_1$

★直線の方程式を求める公式②　$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

2 直線 $l:\ y=mx+b,\ \ l':\ y=m'x+b'$について、

(1)$l\parallel l' \Leftrightarrow m=m'$　　(2)$l\perp l' \Leftrightarrow mm'=-1$

円と 2 次曲線



点$P(a, b)$を中心とし、半径rの円の方程式　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

★上の式を展開した方程式　　　　　　　　$\boldsymbol{x^2+y^2+lx+my+n=0}$

原点$O(0,0)$を中心とし、半径rの円の方程式　$x^2+y^2=r^2$

原点が中心の円の方程式を★の方程式に当てはめると$l, m=0,\ n=-r^2$

三角形の外接円の方程式の解法

3 つの頂点の座標を★の方程式に代入し、連立方程式として解き、l, m, nを求める

円$x^2+y^2=r^2$の上の点$P(x_0, y_0)$における接線の方程式　　$x_0x+y_0y=r^2$

証明(教科書 170 ページより引用)

円の接線は、接点を通る半径に垂直である。$x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$のとき、半径 OP の傾きは$\frac{y_0}{x_0}$であるから、点 P における接線の傾きは$-\frac{x_0}{y_0}$であり、その方程式は$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$である。分母を払って整理すると、$y_0(y-y_0)=-x_0(x-x_0)$

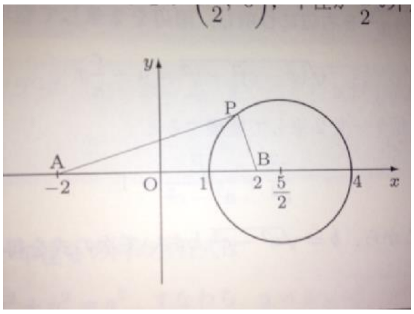
$$=y_0y-y_0^2=-x_0x+x_0^2$$

$$=x_0x+y_0y=x_0^2+y_0^2$$となる。

P が円上にあるから、$x_0^2+y_0^2=r^2$であり、方程式$x_0x+y_0y=r^2$が導かれる。

$x_0=0$のとき、$y_0=\pm r$であり、接線の方程式は$y=\pm r$

$y_0=0$のとき、$x_0=\pm r$であり、接線の方程式は$x=\pm r$



アポロニウス~~・ドラゲリオン~~の円……線分 AB を$m:n$に内分する点と外分する点を直径の両端に持つ円。

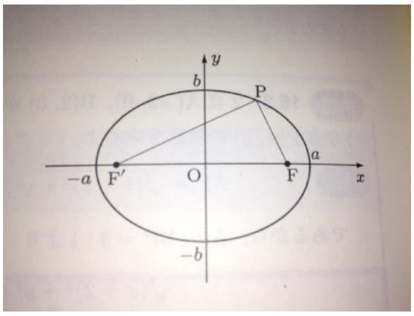
簡単なアポロニウスの円の方程式の求め方

中心：線分 AB を$m:n$に内分、外分する点の座標を見つけ、その 2 点を結んだ線分の中点

半径：中心から内分点または外分点までの距離

あとは$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$に当てはめるだけ。

ね、簡単でしょう？



楕円……2 つの定点F, F'からの距離の和が一定な点 P の軌跡。

F, F'を楕円の**焦点**といい、原点 O を**中心**という。

★楕円の方程式　　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　**←楕円の標準形**

$FP+F'P=2a$である点の軌跡を考えると、

$$FP=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\qquad F'P=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

であるから、条件の式は

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

となる。$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$を右辺に移項し、両辺を 2 乗して整理すると、

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$2cx=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2cx$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x$$

となる。この両辺をもう１度２乗して整理すると、

$$x^2-2cx+c^2+y^2=a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$x^2+c^2+y^2=a^2+\frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

となる。$a>c$であるから、$b=\sqrt{a^2-c^2}$とおいて、$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$が得られる。

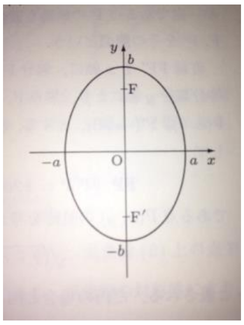
$a=b$のとき：方程式は$x^2+y^2=a^2$となり、半径aの円を表す

$a>b>0$のとき：２つの焦点はx軸上にあり、

その座標は$F\left(\sqrt{a^2-b^2},0\right),\mathrm{F}'(-\sqrt{a^2-b^2},0)$

$a>b$のとき：２つの焦点はy軸上にあり、

その座標は$\mathrm{F}\left(0,\sqrt{b^2-a^2}\right),\mathrm{F}'(0,-\sqrt{b^2-a^2})$で与えられ、$FP+F'P=2b$



円と楕円の関係

原点Ｏを中心とし、半径aの円の方程式は、$x^2+y^2=a^2$すなわち$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$と表される。

この円をy軸方向に$\frac{b}{a}$倍だけ縮小または拡大した図形の方程式は、

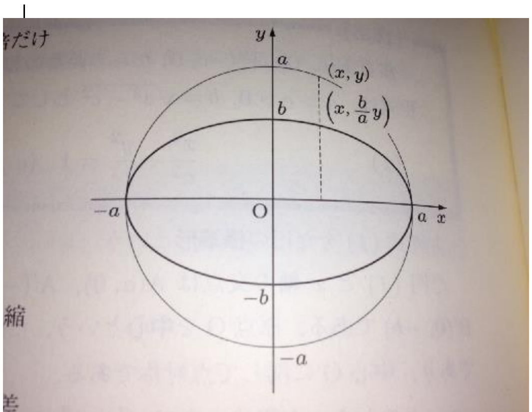
$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

である。両辺を２乗して整理すると、

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$y^2=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

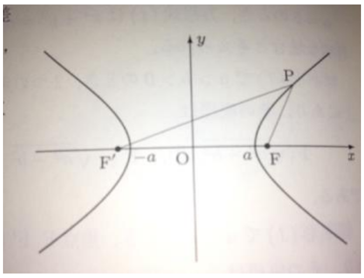


となる。楕円は円を１つの直径の方向に拡大または縮小したものである。

双曲線……２定点F,F'からの距離の差が一定な点Ｐの軌跡。F,F'を**焦点**という。

★双曲線の方程式　　$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$　(求め方は楕円と同様)　←**双曲線の標準形**

双曲線の漸近線　　$y=\frac{b}{a}x,y=-\frac{b}{a}x$



双曲線の第１象限にある部分は、$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$を変形して、

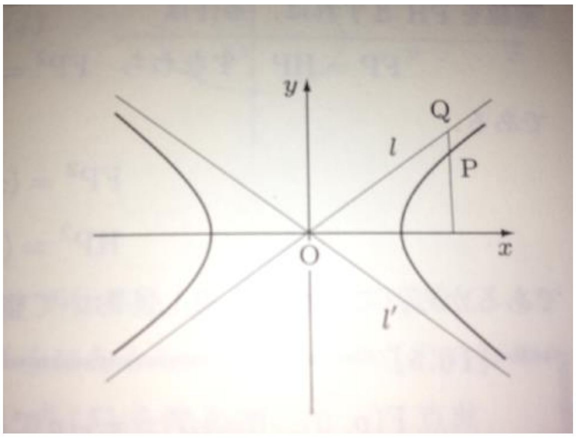
$$y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - \mathrm{b}^2$$

$$y^2 = \frac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

と表せる。それと方程式$y = \frac{b}{a}x$で表される直線lの関係を調べる。

双曲線の点$P(x, y)$に対して、同じx座標を持つ直線l上の点をQとする。Qのy座標は$\frac{b}{a}x$であり、$\sqrt{x^2 - a^2} < x$だから、点Pは常に点Qの下にある。



また、QとPのy座標の差は、

$$PQ = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

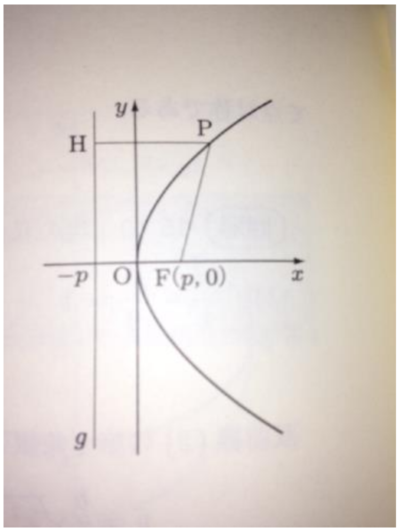
$$= \frac{ab}{a^2}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

$$= \frac{ab\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)}$$

$$= \frac{ab}{\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)} < \frac{ab}{x}$$

である。xが大きくなる時、$\frac{ab}{x}$は限りなく0に近づくから、双曲線上の点Pは直線lに近づく。すなわち、直線lは双曲線の漸近線である。双曲線の対称性により、$y = -\frac{b}{a}x$も漸近線になる。

放物線……定直線gとこの上にない定点Fから等距離にある点Pの軌跡。gをその**準線**、Fを**焦点**という。具体的には2次関数のグラフを回転させたり並行移動させたものと考えればいい(はず)



★焦点$F(p, 0)$, 準線が$x = -p$である放物線の方程式　$y^2 = 4px$　**←放物線の標準形**

点Fからgに下ろした垂線をx軸にとり、gとx軸の交点とFを結ぶ線分の垂直二等分線をy軸にとる。Fとgとの距離を$2p$とすると、Fの座標とgの方程式は

$$F(p, 0), g: x = -p$$

と表される。放物線上の点$P(x, y)$から準線gに下ろした垂線をPHとすれば、条件は

$$FP = HP \text{すなわち} FP^2 = HP^2$$

である。

$$FP^2 = (x - p)^2 + y^2$$

$$HP^2 = (x + p)^2$$

であるから、この2式を等しく置いて整理すると、

$$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$y = 4px$$

が得られる。

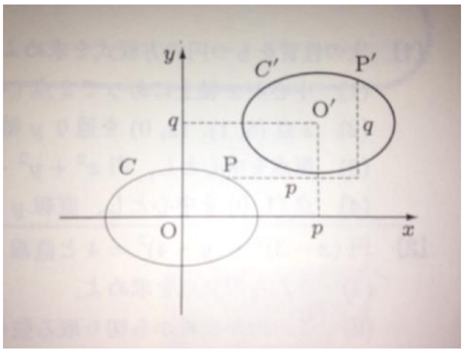
2 次曲線……楕円、双曲線、放物線をまとめた言い方。

曲線$C: F(x,y)=0$をx軸方向にp, y軸方向にq並行移動した像C'の方程式　$F(x-p, y-q)=0)$

楕円、双曲線、放物線の標準形はそれぞれ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad y^2=4px$$

である。これらが表す 2 次曲線は原点 O を中心または頂点としているが、これらの図形を並行移動させせると、その方程式は違った形になる。その場合でも、2 次曲線は 2 次方程式で表される。



p, qを定数として、座標平面上の並行移動

$$(4)\begin{cases} x'=x+p \\ y'=y+q \end{cases}$$

は点$P(x,y)$を点$P'(x',y')$に移す。そんとき、原点$O(0,0)$は点$O'(p,q)$に移される。上の式は逆に、

$$(5)\begin{cases} x=x'-p \\ y=y'-q \end{cases}$$

と表される。

曲線 C の方程式が$F(x,y)=0$であるとし、並行移動によるCの像をC'とする。C 上の点$P(x,y)$の像点$P'(x',y')$が像C'にある(曲線C'上にある)条件は、もとの点 P の座標が方程式$F(x,y)=0$を満たすことであるから、式(5)を代入して、

$$F(x'-p, y'-q)=0$$

となる。従って、C'上の点$P'(x',y')$が満たす方程式は

$$F(x-p, y-q)=0$$

であり、これが像C'の方程式である。

ちなみに、以下に示すのは各 2 次曲線をx軸方向にc, y軸方向にd並行移動した像の方程式である。

楕円：$\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{(y-d)^2}{b^2}=1$

双曲線：$\frac{(x-c)^2}{a^2}-\frac{(y-d)^2}{b^2}=1$

放物線：$(y-d)^2=4p(x-c)$