基礎数学 II

範囲

P121～147 三角関数の定義～加法定理とその応用

選択問題で指数関数・対数関数の問題あり

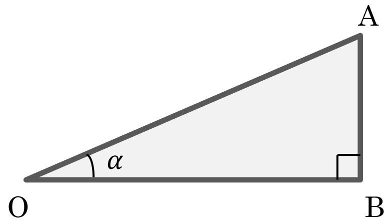
Section11 三角関数の定義

11.1 鋭角の三角関数《三角関数(三角比)、三角関数の関係》

正弦 $\sin\alpha = \frac{AB}{OB}$

余弦 $\cos\alpha = \frac{OA}{OB}$

正接 $\tan\alpha = \frac{AB}{OA}$



∠BAO が直角の直角三角形 OAB において、∠AOB の大きさをαとするとき、

$\sin\alpha = \frac{AB}{OB}$ $\cos\alpha = \frac{OA}{OB}$ $\tan\alpha = \frac{AB}{OA}$ 順に、角αの正弦、余弦、正接という。

上記の 3 つをまとめて鋭角αの**三角関数**または**三角比**という

0°、30°、45°、60°、90° の三角関数

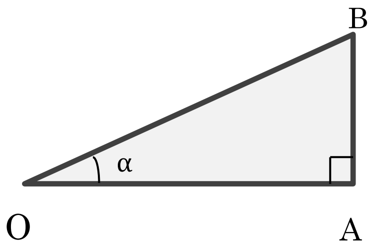
α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3}$	×

右の図の△OAB において、

$AB = OB\sin\alpha,\ OA = OB\cos\alpha$

である。従って、

$\tan\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$であり、次の関係が成り立つ。



$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ $\tan(90° - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$　　$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

↑三平方の定理から得られる式

証明

$\angle A = 90°$の$\triangle$OAB において、三平方の定理$\mathrm{AB}^2 + OA^2 = OB^2$が成り立つ。この両辺を

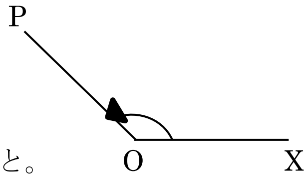
①OB^2で割ると、$\left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}\right)^2 = 1$　　三角関数の定義より、$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

②OA^2で割ると、$\left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}}\right)^2 + 1 = \left(\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}\right)^2$　　三角関数の定義より、$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

※注意

$(\sin\alpha)^2$は、$\sin^2\alpha$と表す。これは、$\sin\alpha^2$と書くとα^2の正弦になってしまうからである。余弦、正接も同様である。

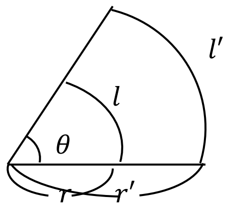
11.2 一般角と弧度法《一般角、動径、六十分法、弧度法、ラジアン、単位円、一般角の三角関数》



一般角……正負の符号をつけた任意の大きさの角。
360° より大きくなることもある。時計回りが正、
反時計回りが負である。

動径……一般角αに対して、αだけ回転した半直線 OP のこと。
360° 回転する(1 回転する)ごとに同じ位置に戻るため、120° ,480° ,−240° などの角の動径は一致する(見分けをつけるため、回転した方向に矢印を書く。1 回転以上した場合は矢印もそれに応じて渦の容量で回す)。

六十分法……角を測る単位として度・分・秒($1° = 60'$, $1' = 60''$)を用いるなど、60 倍または 1/60 倍ごとに単位が変わるもの。



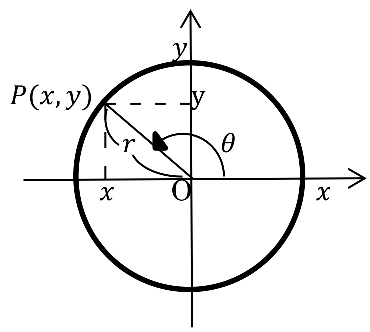
ラジアン……半径rの円で、中心角が$\alpha°$の弧の長さをlとする。
このとき、$\frac{l}{r}$の値は半径rに関係なく、角の大きさだけによって決まるから、この値を$\theta = \frac{l}{r}$とおき、角はθラジアンであるという。

弧度法……ラジアンを単位とする角の測り方。ラジアンを省略して数値だけで表すことが多い。πラジアン$= 180°$　　1 ラジアン$= \frac{180°}{\pi}$　　$1° = \frac{\pi}{180}$ラジアン

である。

半径r、中心角θ(ラジアン)の扇型の弧の長さl、面積Sは次の式で求められる。

$l = r\theta$　　　$S = \frac{1}{2}r^2\theta$



一般角の三角関数

座標平面上で原点 O を中心とした半径rの円を取る。
x軸の正方向(右側)を 0rad とし、動径 OP がその円と交わる点を P(x, y)、OP の表す一般角をθとする。
そのとき、$\sin\theta = \frac{y}{r}$,　$\cos\theta = \frac{x}{r}$,　$\tan\theta = \frac{y}{x}$ と定義する。

動径が第1象限にあるとき、Pからx軸へ下ろした
垂線の交点をAとして三角OAPを考えれば、Section11で定義した三角比と一致する。
また、相似の性質から、$\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$の値は円の半径の大きさではなく、角θだけで決まる。
これらを一般角の**三角関数**という。
単位円……原点を中心とした半径1の円。
単位円と角θを表す動径の交点をP(x, y)とすれば、
定義の式で$r=1$として、

$sin\,\theta = y$　$cos\,\theta = x$　$tan\,\theta = \frac{y}{x}$

$-1 \leq \cos\theta \leq 1$　$-1 \leq sin\,\theta \leq 1$

角θの象限と三角関数の符号				
θの象限	1	2	3	4
$sin\,\theta$	＋	＋	－	－
$cos\,\theta$	＋	－	－	＋
$tan\,\theta$	＋	－	＋	－

$\theta = 0$のとき、単位円とx軸の交点は$(1, 0)$であるから、$sin\,0 = 0$　$cos\,0 = 1$　$tan\,0 = 0$
$\theta = \frac{\pi}{2}$のとき、単位円とy軸の交点は$(0, 1)$であるから、$sin\frac{\pi}{2} = 1$　$cos\frac{\pi}{2} = 0$
$tan\frac{\pi}{2}$は定義されない($1 \div 0$になってしまうため)。正確には、$tan(\frac{\pi}{2} + n\pi)$が定義されない。
また、角$\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$に対応する単位円周上の点の座標はそれぞれ

$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$　である。これを利用して、角が$\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$の整数倍である動径と単位円の交点の座標が求められる。従って、それらの角の三角関数の多胎を求めることができる(正負を判断するだけ。タンジェント？それくらい計算せい)。

Section12　三角関数の性質(公式ラッシュ)

1ページ目の最後辺りに書いた公式(振り返る必要なし)は、一般角でも成り立つ。

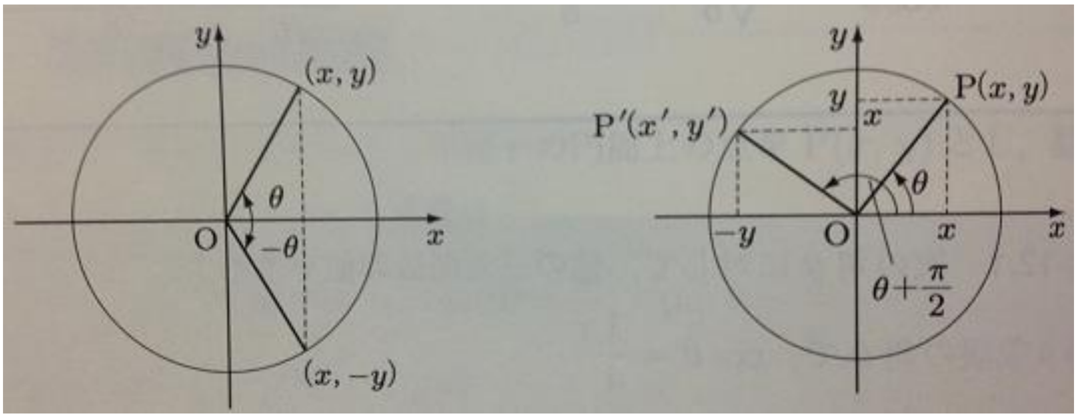
$\boxed{tan\,\theta = \frac{sin\,\theta}{cos\,\theta}}$　$\boxed{sin^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1}$　$\boxed{\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{cos^2\,\theta}}$

また、一周したら動径が同じになるため、次の公式が成り立つ。

$sin(\theta + 2n\pi) = sin\,\theta$　$cos(\theta + 2n\pi) = cos\,\theta$　$tan(\theta + 2n\pi) = tan\,\theta$　(nは整数)

角θの動径と角$-\theta$の動径はx軸について対象だから、

$sin(-\theta) = -sin\,\theta$　$cos(-\theta) = cos\,\theta$　$tan(-\theta) = -tan\,\theta$



角θの動径及び角$\theta + \frac{\pi}{2}(\theta + 90°)$の動径と単位円との交点をそれぞれ$P(x, y)$、$P'(x', y')$とすると、$x' = -y$, $y' = x$であるから、以下の公式が成り立つ。

$sin(\theta+\frac{\pi}{2})=cos\,\theta$　$cos(\theta+\frac{\pi}{2})=-sin\,\theta$　$tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{tan\,\theta}$

この式のθを$-\theta$に置き換えて、$-\theta$の公式を用いるとあら不思議。別の公式が完成しました。

$sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=cos\,\theta$　$cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=sin\,\theta$　$tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{1}{tan\,\theta}$

ここで出た公式を使えば、任意の角の三角関数を表せます。ね、簡単でしょう？

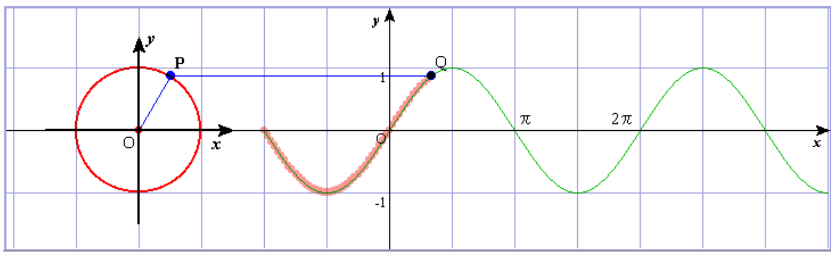
三角関数のグラフ

角θをいろいろ変化させる時、三角関数を

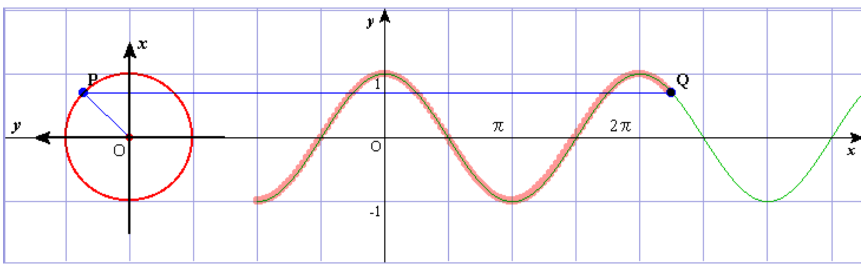
$y=sin\,\theta$　$y=cos\,\theta$　$y=tan\,\theta$と書き、それぞれを

正弦関数　**余弦関数**　**正接関数** という。それぞれのグラフは以下の通り。グラフは出典元にリンクしている。

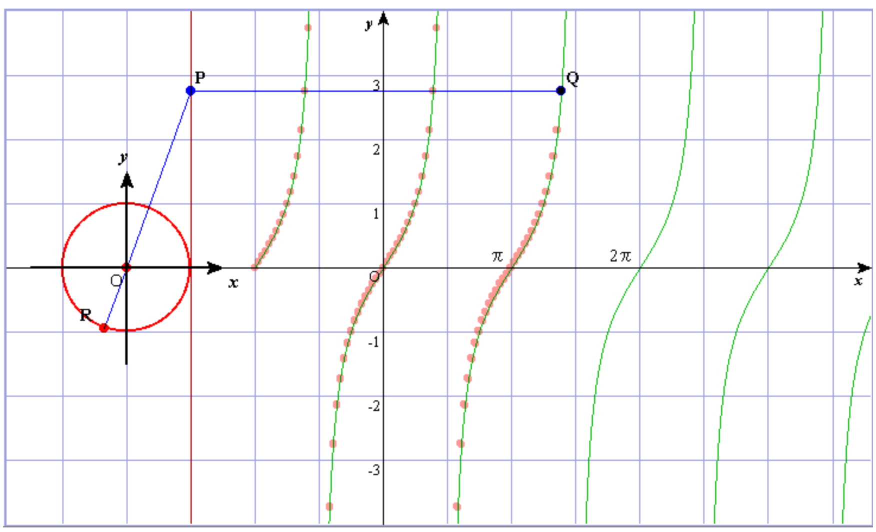
$y=sin\theta$



$y=cos\,\theta$



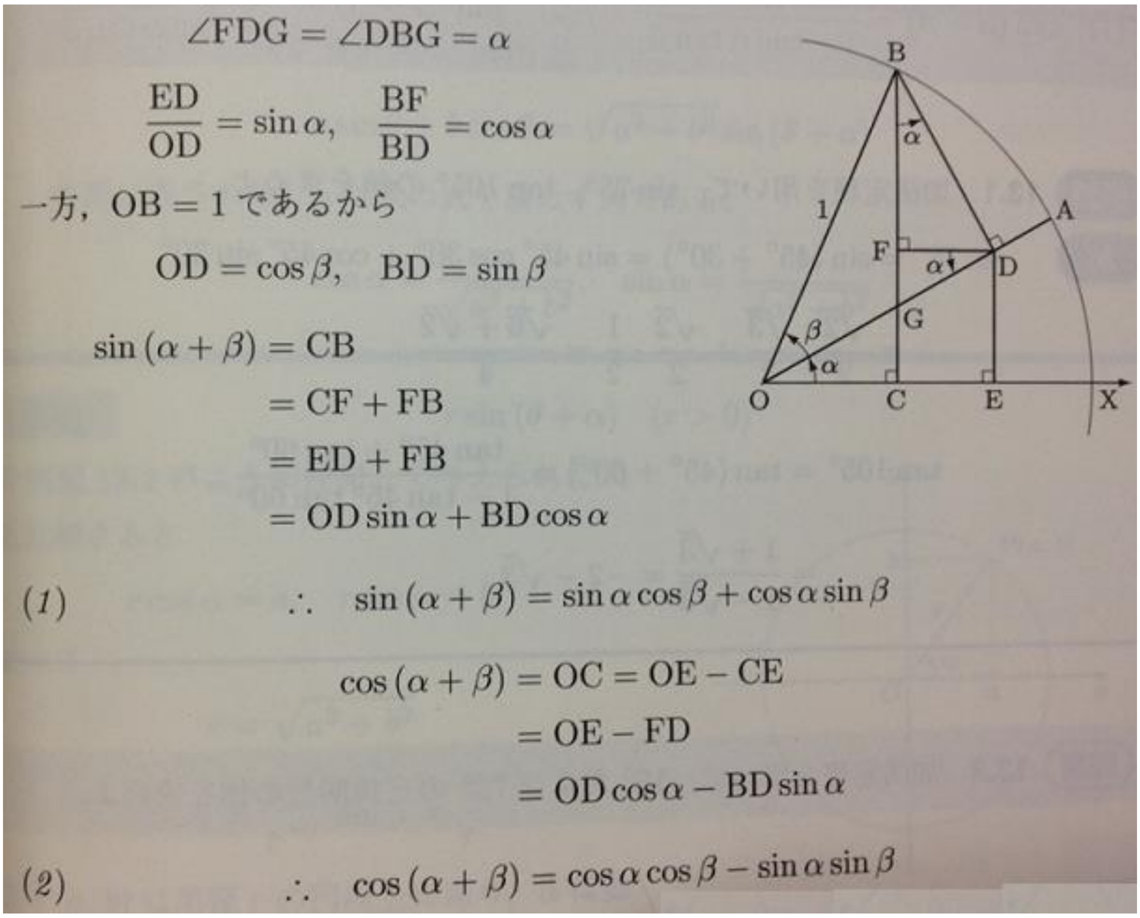
$y=tan\,\theta$



なお、$y=\tan\theta$のグラフは、$\theta=\frac{n\pi}{2}$(nは整数)のときの値が存在しない($\tan\frac{\pi}{2}$は存在しない。その整数倍の$\tan\frac{n\pi}{2}$も然り)。

Section13 加法定理とその応用(ここも公式ラッシュ)

加法定理の証明(教科書丸写し。写真的な意味で)



$\angle \mathrm{FDG} = \angle \mathrm{DBG} = \alpha$

$$\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{OD}} = \sin\alpha, \quad \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{BD}} = \cos\alpha$$

一方，$\mathrm{OB}=1$ であるから

$$\mathrm{OD} = \cos\beta, \quad \mathrm{BD} = \sin\beta$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \mathrm{CB} \\ &= \mathrm{CF} + \mathrm{FB} \\ &= \mathrm{ED} + \mathrm{FB} \\ &= \mathrm{OD}\sin\alpha + \mathrm{BD}\cos\alpha\end{aligned}$$

(1) $\quad \therefore \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \mathrm{OC} = \mathrm{OE} - \mathrm{CE} \\ &= \mathrm{OE} - \mathrm{FD} \\ &= \mathrm{OD}\cos\alpha - \mathrm{BD}\sin\alpha\end{aligned}$$

(2) $\quad \therefore \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

公式は以下の 4 つ。

$sin(\alpha+\beta)=sin\,\alpha\,cos\,\beta+cos\,\alpha\,sin\,\beta$ $\quad$ $sin(\alpha-\beta)=sin\,\alpha\,cos\,\beta-cos\,\alpha\,sin\,\beta$

$cos(\alpha+\beta)=cos\,\alpha\,cos\,\beta-sin\,\alpha\,sin\,\beta$ $\quad$ $cos(\alpha-\beta)=cos\,\alpha\,cos\,b+sin\,\alpha\,sin\,\beta$

ちなみに、tanの加法定理は以下の通り。

$tan(\alpha+\beta)=\frac{tan\,\alpha+tan\,\beta}{1-tan\,\alpha\,tan\,\beta}$ $\quad$ $tan(\alpha-\beta)=\frac{tan\,\alpha-tan\,\beta}{1+tan\,\alpha\,tan\,\beta}$

三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta\ (a^2+b^2\neq 0)$は、$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$の形に変形できる。αは次の式を満たす角である。 $\boxed{\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ $\boxed{\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$